

# **La Méthode Hybrid High Order dans Cast3M.**

## **Description et applications**

David SIEDEL (Mines Paris PSL), T. HELFER (CEA Cadarache), O. FANDEUR (CEA Saclay)

Présentation de travaux issus de la thèse de doctorat de David Siedel soutenue le 3 mai 2023

« **A robust numerical approach for the description of brittle fracture and viscoplastic behavior of fuel rods** »

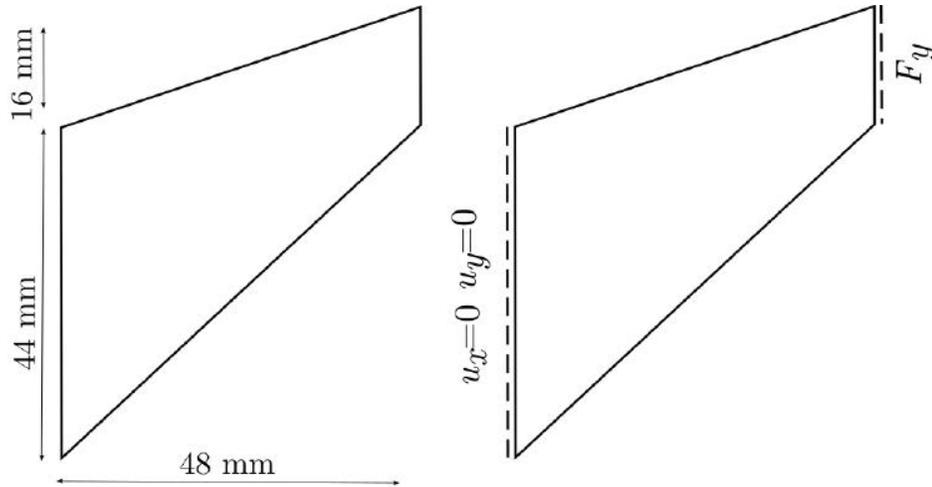
# Sommaire

1. Condition d'incompressibilité et verrouillage numérique
2. Traitements numériques du verrouillage
3. Principe de Hu-Washizu
4. De Hu-Washizu aux méthodes discontinues (HHO)
5. Méthode HHO : Retour sur la membrane de Cook
6. Exemple de mise en données dans Cast3M
7. Autres exemples
8. Bilan et perspectives

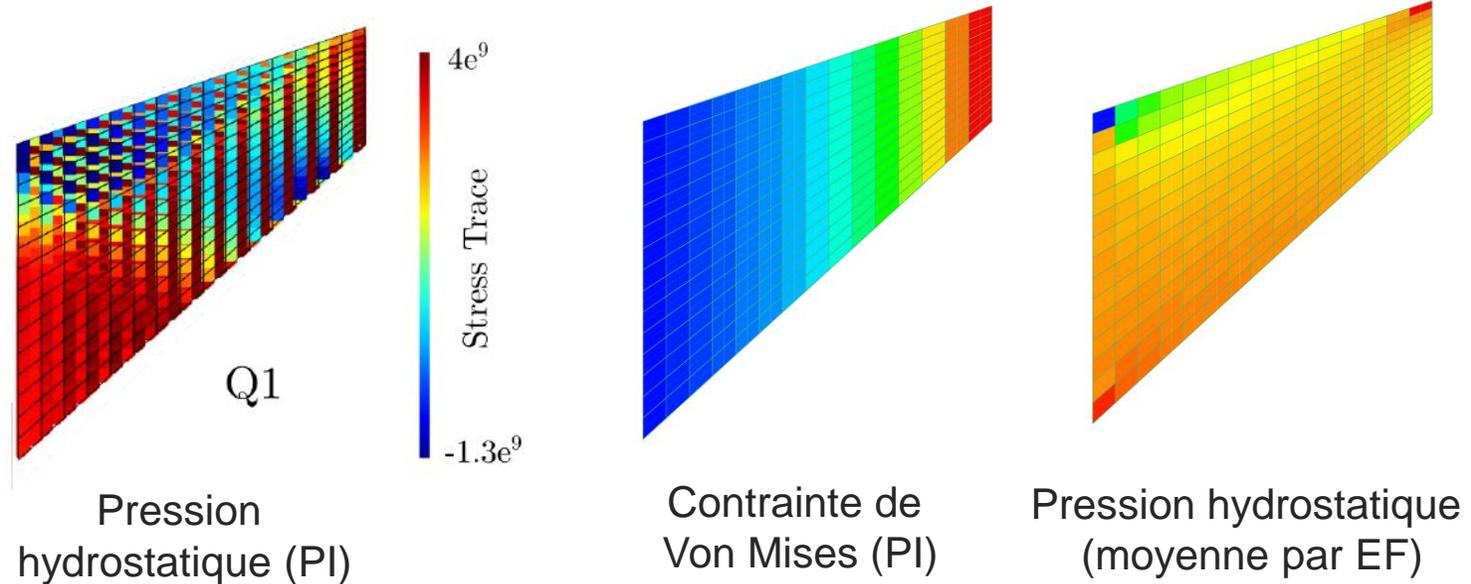


# Condition d'incompressibilité et verrouillage numérique

- Matériaux quasi-incompressibles (coef. Poisson  $\nu \approx 0,5$  / déformations viscoplastiques élevées) : partie isochore de la transformation mal décrite pour les EF linéaires "classiques"



Membrane de Cook : géométrie & chargement



- Fortes oscillations de la pression hydrostatique au sein d'un EF entre PI
  - pb intrinsèque à méthode EF (surtout EF linéaires)
  - lissage pression nécessaire pour modèles physico-chimiques par ex.
- EF linéaires "indispensables" actuellement pour certaines applications industrielles :
  - traitement du contact
  - modèles mécaniques d'endommagement local (PI de même poids – régularisation par taille de maille)

ET

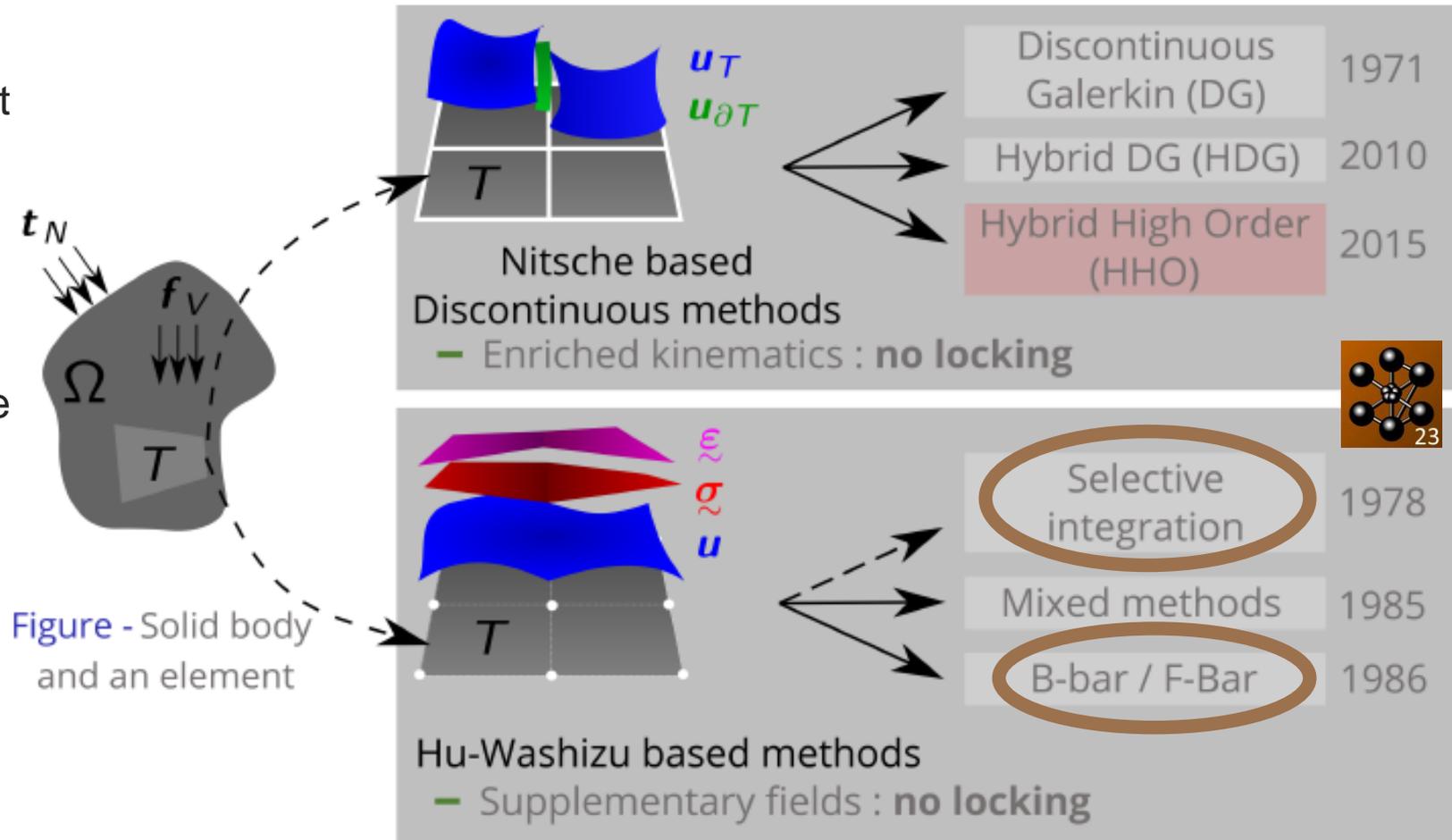
# Traitements numériques du verrouillage

2 principales approches se déclinant en de nombreuses méthodes

MAIS

Les méthodes actuelles en mécanique non linéaire montrent « rapidement » des limites d'utilisation dans un cadre industriel.

**CHOIX de la méthode HHO** car ne semble pas avoir à ce jour de limites !  
(N. Pignet EDF + Thèse D. Siedel)



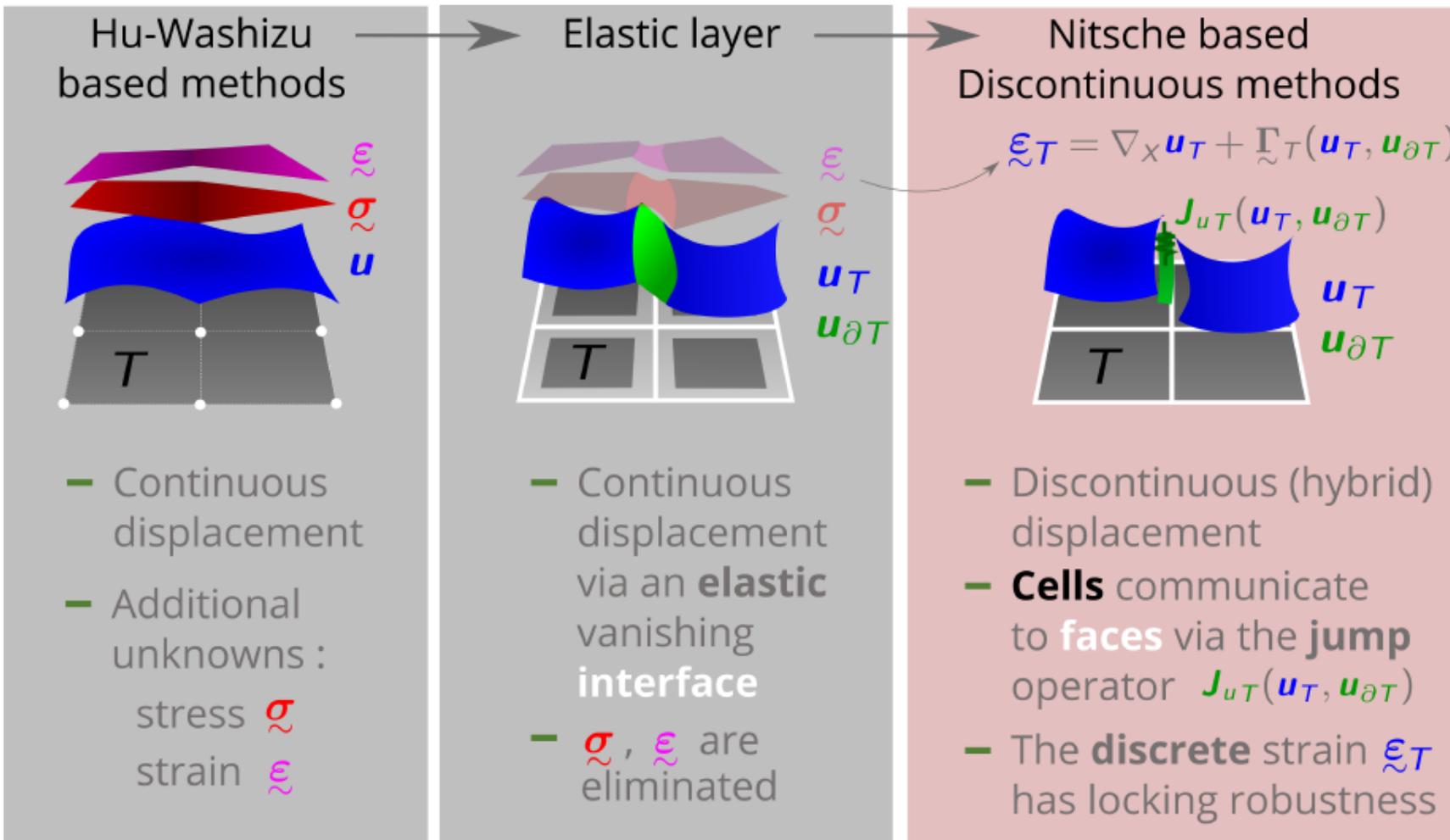
**Objectif :** Présenter la méthode HHO dans un cadre mécanique et compatible avec code de calcul EF

# Principe de Hu-Washizu

Principe de Hu-Washizu (Hu, 1954; Washizu, 1955) = généralisation du principe des Travaux Virtuels

	<i>Principle of Virtual Works</i>	<i>Hu-Washizu principle</i>
Lagrangian	$\int_{\Omega} \psi_{\Omega}(\nabla_X^s \mathbf{u}) - \mathcal{W}_{\Omega}^{\text{ext}}$	$\int_{\Omega} \psi_{\Omega}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : (\nabla_X^s \mathbf{u} - \underline{\underline{\varepsilon}}) - \mathcal{W}_{\Omega}^{\text{ext}}$
Degrees of Freedom	$\mathbf{u}$	$\mathbf{u}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}$
Weak form	$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla_X^s \hat{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$	$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla_X^s \hat{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$ $\int_{\Omega} (\nabla_X^s \mathbf{u} - \underline{\underline{\varepsilon}}) : \hat{\underline{\underline{\sigma}}} = 0$ $\int_{\Omega} \left( \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \psi_{\Omega}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} = 0$

# De Hu-Washizu aux méthodes discontinues (HHO)



Inconnues (primales) :  
**déplacement cellules**  $\underline{u}_T$   
 (polynômes ordre  $l$ )  
 &  
**déplacement faces**  $\underline{u}_{\partial T}$   
 (polynômes ordre  $k$ )

Études de convergence montrent que  $l=k-1$  ou  $l=k$  ou  $l=k+1$

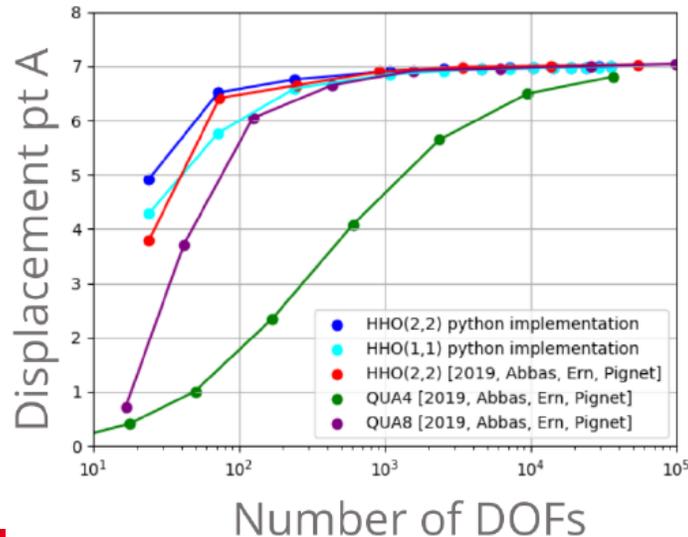
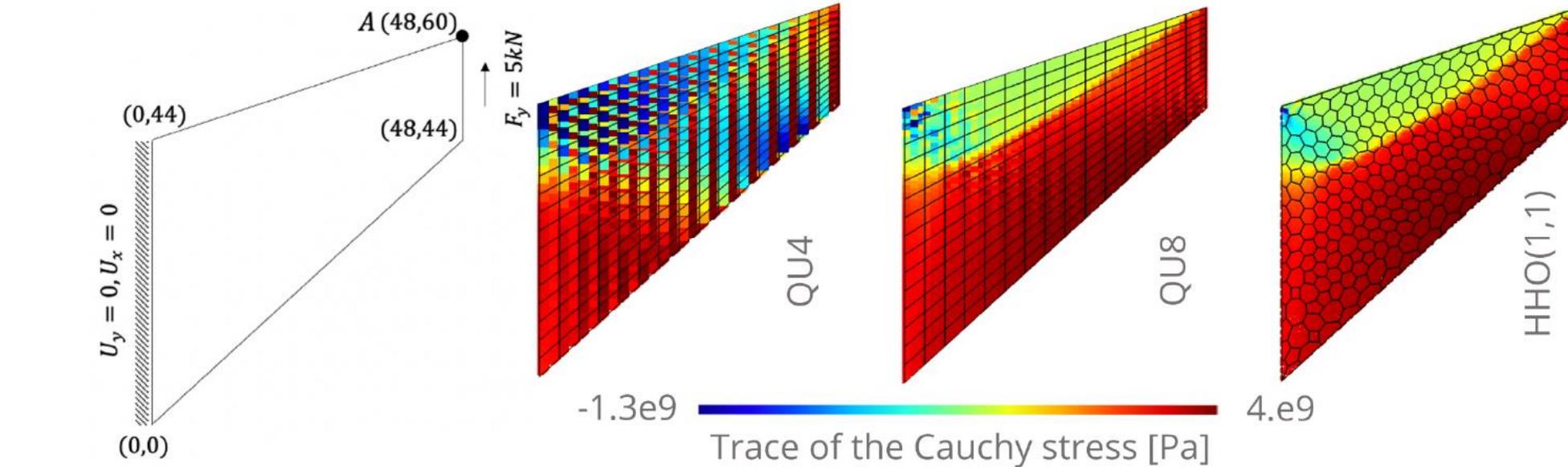
Inconnues de **cellule** locales peuvent être éliminées par :

- **Condensation statique** (N. Pignet EDF 2019)
- **Algorithme de résolution en cellule** (D. Siedel CEA 2022)

→ Problème HHO comparable au problème EF, **mais** avec surcoût calculs et/ou mémoire

nb ddl (EF) = nb nœuds x ddl inconnus & nb ddl (HHO) = nb faces x ddl inconnus x nb coeff poly k

# Méthode HHO : Retour sur la membrane de Cook



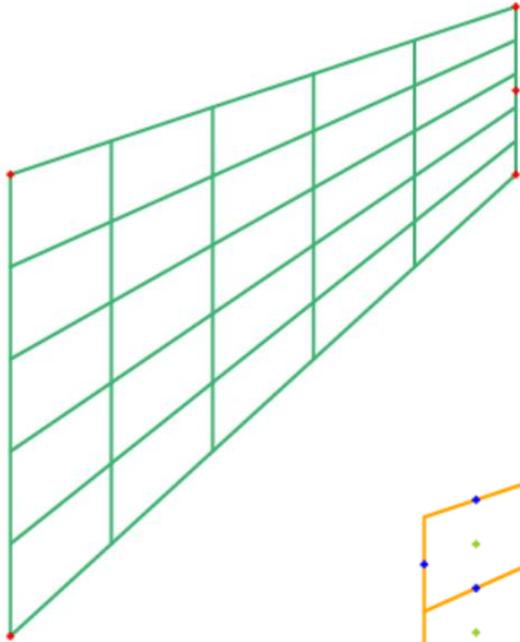
La méthode HHO est insensible au verrouillage numérique même pour des comportements fortement non linéaires en grandes transformations.

Les éléments polygonaux (2D) et polyédriques (3D) sont nativement supportés par la méthode HHO.

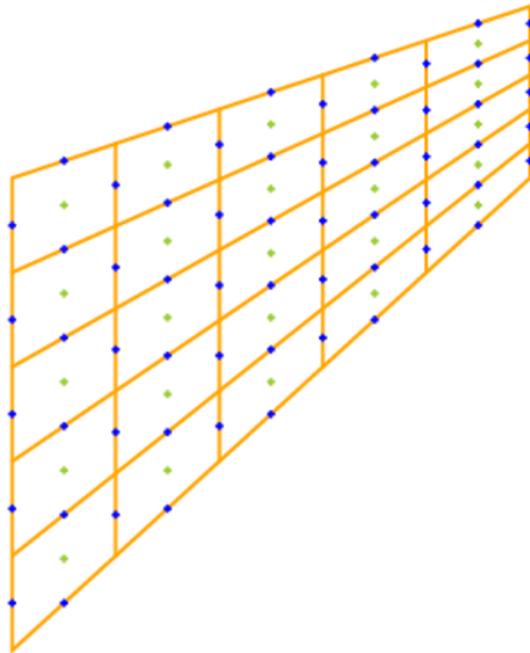
*Cast3M génère des maillages polygonaux depuis plus de 20 ans !*



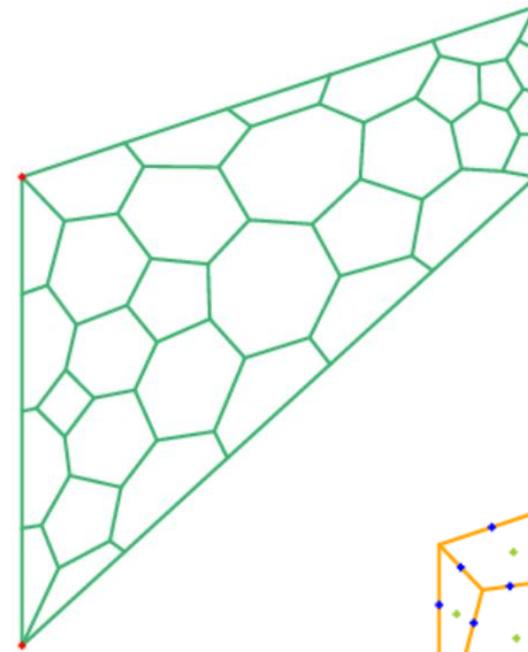
# Exemple de mise en données dans Cast3M (2)



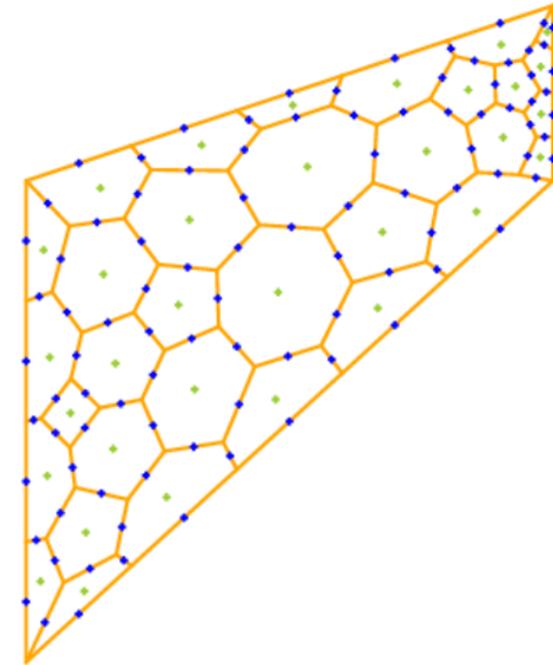
Membrane de Cook – Maillage



Faces (Orange) – Points supports HHO Faces (Bleu) Cellules (Vert)



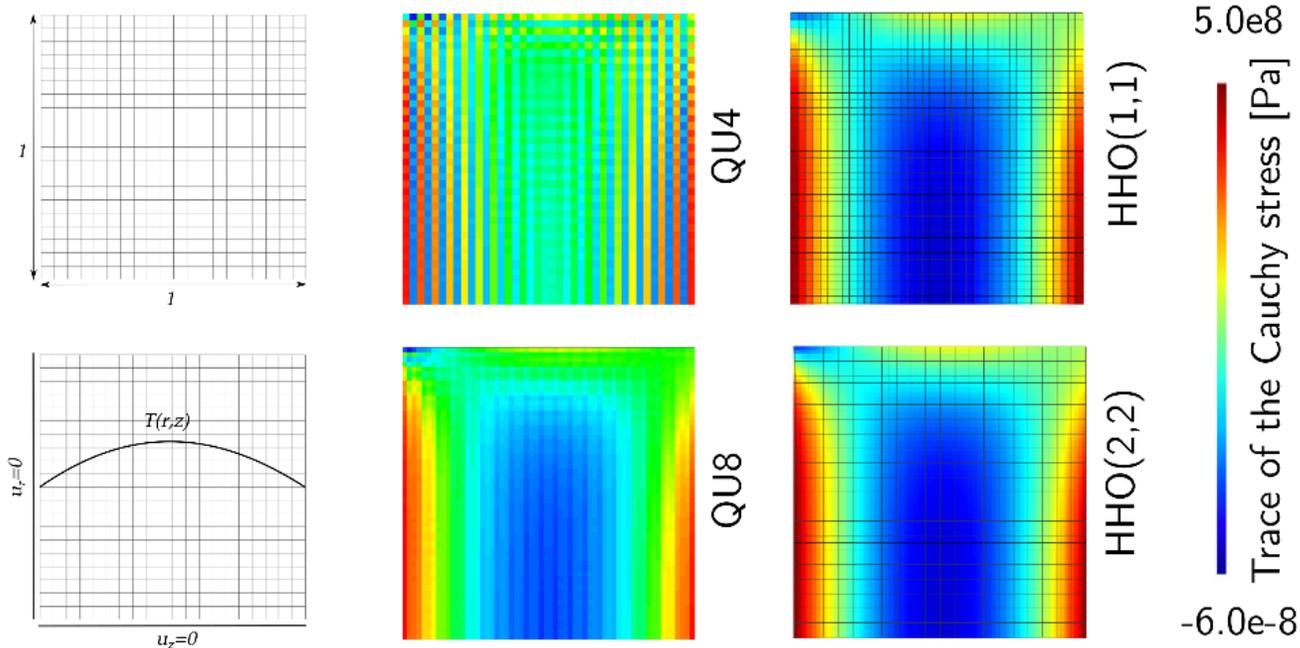
Membrane de Cook – Maillage



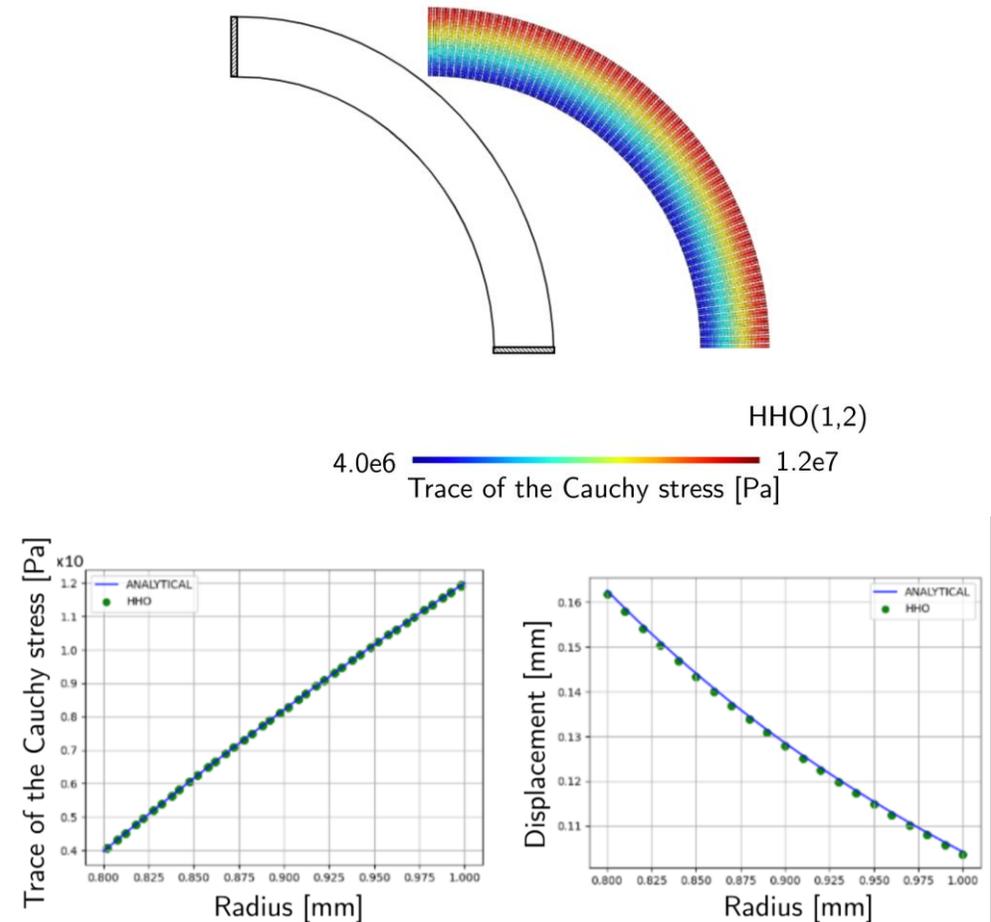
Faces (Orange) – Points supports HHO Faces (Bleu) Cellules (Vert)

# Autres exemples (1)

## Dilatation thermique libre

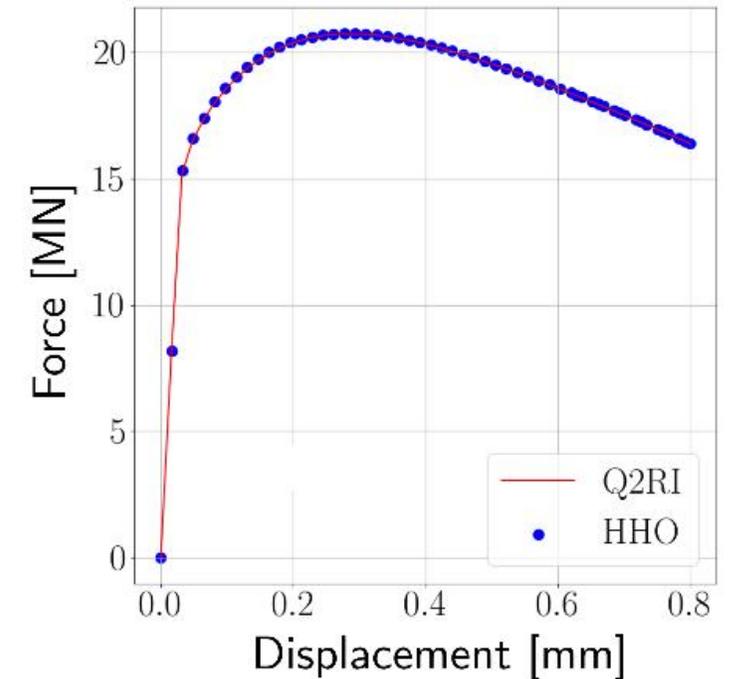
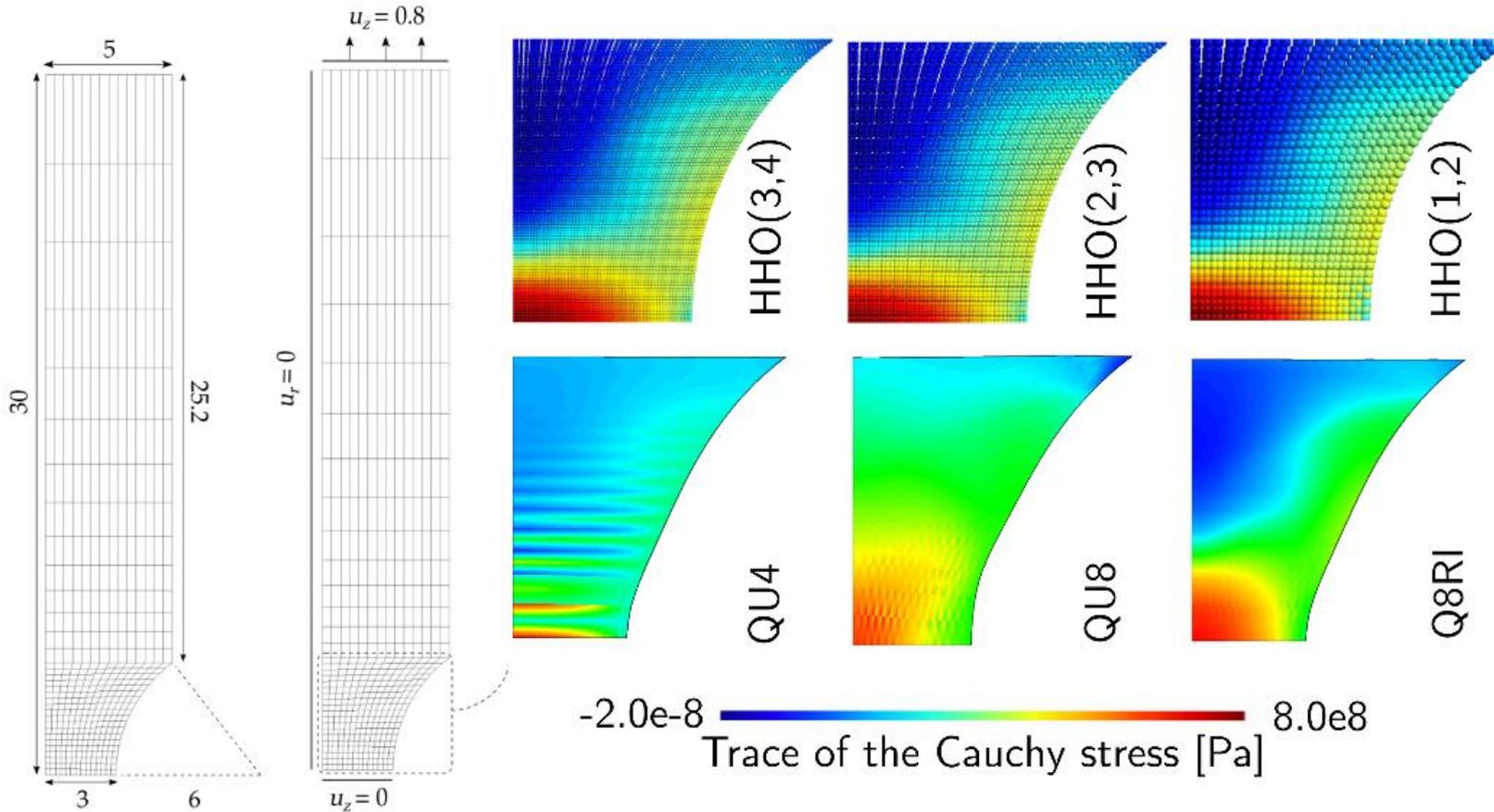


## Sphère sous pression (2D axi)



# Autres exemples (2)

Traction d'une éprouvette AE-10 (2D Plan ou 2D Axis) – Grandes transformations plastiques

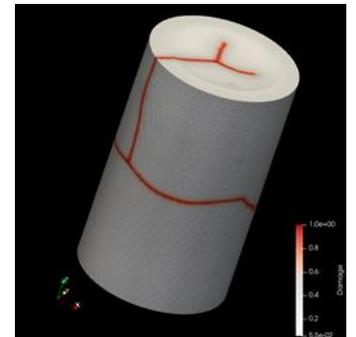


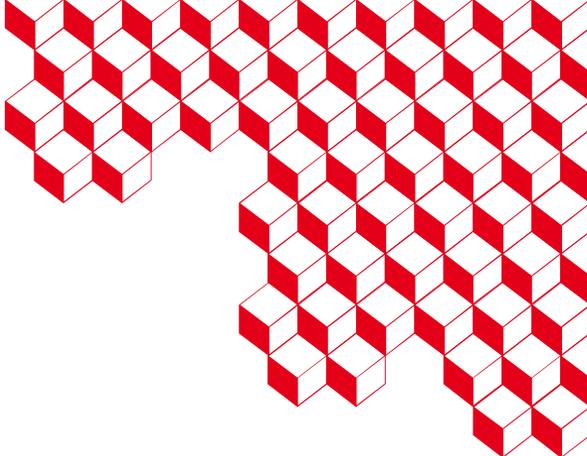
HHO sur élément QUA4

# Bilan et perspectives

## Traitement de la condition d'incompressibilité :

- Présentation de la méthode HHO selon un principe variationnel en mécanique non-linéaire (petites perturbations et grandes transformations)
- Développement d'une bibliothèque HHO 2D/3D (C++17) autonome pour la mécanique, la thermique... → Mise à jour en cours
- Introduction de la méthode HHO (2D Plan) dans Cast3M version 2021.1 via bibliothèque ci-dessus
- Extension, avec succès, de la méthode HHO au cas 2D axisymétrique (disponible dans bibliothèque) → intégration dans Cast3M en cours
- Extension HHO au cas 1D (notamment 1D axisymétrique) :  
→ HHO 1D = cas particulier : faces HHO = noeuds EF ( $k=0$ )  
mais ordre des cellules ( $l$ ) est libre !
- Améliorations & Corrections en continu dans Cast3M





**“ Merci de votre attention ! ”**

*Olivier FANDEUR (CEA DES/ISAS/DM2S/SEMT/LM2S)*