Méthodes numériques avancées en Mécanique non linéaire

- Pierre Verpeaux – CEA Saclay
- Objet du cours
  - Problèmes non linéaires en milieu industriel
  - Problèmes et techniques dans CASTEM
  - Limité à l'analyse statique et quasi statique
  - Méthode implicite – Équilibre à la fin du pas
  - Avancé : appliquer les techniques la où elles ne s'appliquent pas

La mécanique au CEA

- Essentiellement sûreté des installations
- Pas le dimensionnement usuel
- Tenue ultime des structures
- Durée de vie, vieillissement
- Thermomécanique
- Enveloppe des solutions

La mécanique au CEA (suite)

- Importante validation expérimentale
  - Comportement élémentaire
  - Aspect structuraux : adhérence fer béton, conditions aux limites
  - Méthodes numériques
- Limites de la validation
  - Faisabilité (dimension, temps)
  - Reproductibilité

Critères de qualité des méthodes et logiciels

- Exactitude des résultats !
- Invariance au maillage (et convergence)
- Invariance à l’application du chargement
- Stabilité vis à vis des petites perturbations (géométrie, comportement)
- Enveloppe du problème

Existence et unicité des solutions

- Le problème physique a une solution unique On doit la trouver.
- Remarques
  – Pas toujours de solution unique au problème physique : perte de symétrie, flambage
  – Parfois pas de solution : rupture

Existence et unicité (suite)

- Le modèle de comportement n’est pas la réalité – milieu continu, homogénéisation...
- La méthode numérique approche le modèle théorique
- Le problème discrétisé est différent du problème continu (espace et temps)
- Conditionnement, erreurs d’arrondi …

Plan général

- Introduction, non linéarités, champs
- Algorithmes et méthodes
- Contact – Frottement
- Thermomécanique
- Non convergence

Définition du problème

- Structure S
- Comportement Comp
- Chargement F
- Conditions aux limites Cl
- Trouver l'état de la structure en équilibre
  - Déplacement
  - Variables internes

Équilibre

- $Div(\sigma) = F$
- $F = B\sigma$ compte tenu Cl
- $\sigma = comp(\varepsilon, p, ??????)$
- $\varepsilon = (grad(u) + grad(u^t))/2$
- $\varepsilon = B^t u$
- Élastique linéaire : $\sigma = D\varepsilon$
- $F = BDB^t u$ $F = Ku$

Conditions aux limites

- Dirichlet : u imposé
- Von Neumann : grad(u) imposé, c-a-d F imposé
- Mixte : $\alpha u + \beta grad(u)$ imposé
  - Condition échange en thermique
  - Décomposition de domaine

Non linéarités

- Comportement
  - $\sigma = \mathrm{Comp}(\varepsilon, p, \text{paramètres de contrôle})$
  - Ajout ou enlèvement de matière
- Géométrique
  - $d\varepsilon = du / L \qquad L = L_0 + du$
  - $\varepsilon = u + \frac{1}{2} u^2$
  - Flambage, grand déplacement

Non linéarités (suite)

- Chargement F
  - Pression suiveuse
  - Forces d’inertie (structure en rotation)
  - Forces électromagnétiques
- Conditions aux limites
  - Contact
  - Frottement

Non linéarité chargement

- Pression suiveuse tuyauterie, cuve, aube
  - $F = P N$
  - Nécessaire pour analyse de stabilité
- Forces d'inerties dans un repère tournant
  - Calcul de turbine, arbres, alternateur
- Thermique
  - Température dépendant de la position
  - Coefficient d'échange dépendant pression

Non linéarités géométriques

- Calcul de corde
- Flambage
- Striction (diminution de la section)

Non linéarités CL

- Contact (formulation statique)
- $u > u_0$
- $u = u_0$ et $F_r > 0$
  - Cohésion $F_r > -F_c$

Non linéarité CL (suite)

- Frottement
- $u_t = 0$ et $F_t < F_{lim}$
- $u_t > 0$ et $F_t = F_{lim}$
- Loi de Coulomb : $F_{lim} = \mu F_n$
- Adhérence $F_{lim} = \mu F_n + F_{adh}$
- Dépendance possible en vitesse

Non linéarité CL (thermique)

- Rayonnement
  - Cavité $Q = k\,(T_1 - T_2)^4$
  - Obstacle (mobile)

Non linéarités matériau

- Dépendance de matériaux
- Élasticité non linéaire
- Plasticité
- Viscoélasticité et viscoplasticité
- Endommagement
- Fatigue
- Bétons – sols – exotique

Dépendance des matériaux

- Propriétés fonction de
  - Température
  - Irradiation
  - Chimie, changement de phase
  - Champ magnétique
  - Vieillissement
  - Hygrométrie

Élasticité non linéaire

- Élastomère, Bois
- Même trajet Charge Décharge
- Pas de dissipation
- Existence d’un potentiel
- Énergie de déformation

Plasticité

- Métaux ferreux
- Limite élastique
- Décharge élastique
- Critère de plasticité
  - Von Mises 2ème invariant déviateur des contraintes
  - Tresca max(σ_i - σ_k)
- Écrouissage : Isotrope, cinématique
- Loi d’écoulement – normal, non associé

Viscoélasticité - Viscoplasticité

- État du matériau évolue avec le temps. Contraintes Déformations
- Fluage. Contrainte constante, déformation augmente.
  - Guimauve
  - Inox 316
  - Haute température

Visco (suite)

- Modèle de Maxwell

- Modèle de Kelvin

- Souvent couplé à la plasticité. Indépendance?
- Méthode : enlever déformations visqueuses avant (ou après) appliquer le comportement.

Endommagement

- Métaux – composites - céramiques
- Plasticité + changement caractéristiques élastiques.
- Croissance des cavités dans le matériau associée (ou non) à de la plasticité
- Situation ultime ($\varepsilon > 10\%$)

Fatigue

- Alliage légers, Inox
- Vieillissement du matériau en fonction du nombre et de l’intensité des cycles
- Effet : diminue la capacité de déformation
- Méthode : modification des propriétés du matériau établies à partir d’essais
- Courbe cyclique

Béton - Sol

- Matériau fragile. Résistance en traction faible (3MPa)
- Modes endommagement multiples
  - Rupture en traction
  - Endommagement, rupture en cisaillement
  - Endommagement en porosité
- Couplage hygrométrie
- Vieillissement
- Modèle multicritères
- Béton armé, adhérence fer béton

Transparent annulé

Plasticité - Écoulement

- Retour radial
- Problème : connaissant état initial + $\Delta\varepsilon$
  trouver $\Delta\sigma$
- Critère $F(\sigma, p, \ldots..)$
- $\sigma_t = D\,\Delta\varepsilon + \sigma$
- Évaluation $F(\sigma_t)$
- Si $F(\sigma_t) < 0$ alors décharge élastique $\sigma_n=\sigma_t$

Écoulement (suite)

- Si $F(\sigma_t) > 0$ on veut trouver σ_n tel que :
  - $F(\sigma_n, p_n, \ldots) = 0$ et $\quad \sigma_t - \sigma_n = \Delta p \dfrac{\partial F}{\partial \sigma}$

$$F(\sigma_n, p_n) = F(\sigma_t, p) + \Delta p \frac{\partial F}{\partial p} + (\sigma_n - \sigma_t) \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

$$F(\sigma_n, p_n) = F(\sigma_t, p) + \Delta p \frac{\partial F}{\partial p} - \Delta p \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)$$

Plasticité et unicité

- Pour un état de déformation, infinité états de contraintes possibles
- Minimisation de la dissipation
- Influence histoire du chargement

Multicritère

- $F_1(\sigma,p_1,\ldots)$
- $F_2(\sigma,p_2,\ldots)$
- $\sigma_T = \sigma + D\Delta\varepsilon$ $\geq$

$F_1 < 0$ et $F_2 < 0$ $\Rightarrow$ OK décharge élastique

$F_1 \geq 0$ et $F_2 < 0$ ou $F_1 < 0$ et $F_2 \geq 0$

écoulement sur un critère seulement

Multicritère (suite)

- Si $F_1 \geq 0$ et $F_2 \geq 0$ on cherche

  $F_1(\sigma_n , p_{1n} , \ldots) = 0$

  $F_2(\sigma_n , p_{2n} , \ldots) = 0$

$$\sigma_t - \sigma_n = \Delta p_1 \frac{\partial F_1}{\partial \sigma} + \Delta p_2 \frac{\partial F_2}{\partial \sigma}$$

$$F_1(\sigma_n, p_{1n}) = F_1(\sigma_t, p_1) + \Delta p_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_1} - \Delta p_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\right)^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\right) - \Delta p_2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\right)^T \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}\right)$$

$$F_2(\sigma_n, p_{2n}) = F_2(\sigma_t, p_2) + \Delta p_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_2} - \Delta p_1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}\right)^T \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma}\right) - \Delta p_2 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}\right)^T \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma}\right)$$

Multicritère (suite 2)

- $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ ➔ Δp_1 et Δp_2
- Si $\Delta p_1 > 0$ et $\Delta p_2 > 0$
  Écoulement sur les 2 modes
- Si $\Delta p_1 > 0$ et $\Delta p_2 < 0$ Écoulement sur 1
- Si $\Delta p_1 < 0$ et $\Delta p_2 > 0$ Écoulement sur 2

Multicritère (remarques)

- Si pas écrouissage : cône des normales
  - Si F_1 F_2 convexe unicité de la solution
- Si écrouissage positif cône entre obliques
  - Domaine de couplage plus important
  - Unicité possible même si F_1 F_2 concave
- Si écrouissage négatif cône entre obliques
  - Domaine de couplage moins important
  - Non unicité possible même si F_1 F_2 convexe

Multicritères (fin)

- En théorie pas plus de 6 critères activés
- Incrément fini ➔plus de 6 critères
  - Essayer toutes les solutions
  - Solution correcte ⇔ $\Delta p_i > 0$
  - Possibilité plusieurs solutions
- Remarque : Le couplage de modes est une situation stable

Fissuration

- Critère en traction sur les contraintes principales
  - Avant fissuration
    - $F = -\sigma_{lim} + \max \sigma_{principale}$
  - Après fissuration
    - On conserve la direction de fissuration
    - $F_1 = \sigma_1$
    - Possibilité fissuration orthogonale
      - $F_2 = -\sigma_{lim} + \max(\sigma_2, \sigma_3)$
  - Possibilité régularisation

Champs dans Castem

- Champs définis aux nœuds du maillage
  - CHAMPOINT
- Champs définis dans les éléments
  - CHAMELEM

CHAMPOINT

- Discrets
  – Forces, chaleurs
  – S’additionnent lors de l’union de 2 champs
- Diffus
  – Déplacements, températures
  – Peuvent s’unir si ils sont égaux sur la partie commune

CHAMELEM

- Champs définis dans l'élément
- Discontinus entre éléments
- Définis sur un support
  - Centre de gravité ⇔champ constant
  - Nœuds ⇔Force nodales équivalentes
  - Points d'intégration des fonctions interpolations
    ⇔ σ, variables internes

Champs liés au comportement

- Définis aux points d’intégration
  - Calcul des contraintes aux points d’intégration
  - En élastique linéaire plus précis
- Écoulement en ces points
- Variables internes conservées en ces points
- Problème :
  - Incompatibilité possible avec fonction interpolation
  - Impossibilité vérifier interpolation et comportement
  - Possibilité approche minimisation globale sur élément
  - Écriture différente chaque couple élément-modèle

Changement de support

- Contraintes aux points d'intégration
- Besoin contraintes aux nœuds pour post-traitements : graphiques et critères
- Température aux nœuds en thermique
- Besoin aux points intégrations pour calcul comportement
- ➔Nécessité changement de support

Contraintes dans un barreau

- Température parabolique dans SEG3 (3 points intégration)
- $\varepsilon_{th} = \alpha T \Rightarrow \sigma_{th}=\Delta\varepsilon_{th} \Rightarrow F_{th}=B\sigma_{th}$
- $Ku=F_{th} \Rightarrow \varepsilon=Bu \Rightarrow \sigma=D(\varepsilon-\varepsilon_{th})$
- Problème : ε linéaire ε_{th} parabolique
- ➔ contraintes non nulles en dilatation libre

Changement de support (Méthode)

- Passage Nœuds ➔ points intégrations
  - Fonctions interpolations
- Passage points intégrations ➔ Nœuds
  - Recherche valeurs aux nœuds qui minimisent l'écart aux points de Gauss
    - $X = \Sigma n_i X_i$
    - Minimisation de : $\sum_{pt\,int} p_j Jac(j) \left| x_{int} - x_j \right|$

Changement de support (suite)

- Minimisation de : $\sum_j p_j \mathrm{Jac}(j)\left(\sum_i n_i(j) X_i - x_j\right)^2$

$$\frac{\partial}{\partial X_k} = 0 \Rightarrow \sum_j p_j \mathrm{Jac}(j)\left(\sum_i n_i(j) X_i - x_j\right) n_k(j) = 0$$

Système d’équations linéaires à résoudre

Changement de support (fin)

- Si nb nœuds = nb pts intégration
  – 1 solution exacte
- Si nb nœuds < nb pts intégration
  – Solution mais interpolation # valeurs initiales
- Si nb nœuds > nb pts intégration
  – Infinité de solutions
  – Ajout de contraintes
  – Exemple nœud milieu = moyenne nœuds sommets

Projection de champ d'un maillage sur un autre

- Même principe que changement de support
- Minimisation écart entre champ cherché inconnu et champ initial
- Champ définis à partir des valeurs aux nœuds
- Champ initial : $X = \Sigma N_i X_i$
- Champ projeté : $X = \Sigma n_j x_j$

Projection de champ

- Minimisation $\int \left| X - x \right|$

$$\frac{\partial}{\partial X_k} \int \left(\sum_i N_i X_i - \sum_j n_j x_j \right)^2$$

$$\int N_k \left(\sum_i N_i X_i - \sum_j n_j x_j \right) = 0$$

$$\sum_i \int (N_k N_i) X_i - \sum_j \int (N_k n_j) x_j = 0$$

Projection de champs (suite)

- Calculs des intégrales par intégration numérique

$$\sum_i \sum_m p_m Jac_m \left(N_k N_i\right) X_i - \sum_i \sum_m p_m Jac_m \left(N_k n_i\right) x_i = 0$$

- Résolution système linéaire portant sur toute la structure
- Possibilité contrainte supplémentaire
  - Ex : $x = 0$ frontière
  - $x < x_{max}$