

Traitement numérique non local de comportements non-linéaires par l'équation d'Helmholtz à coefficients variables.

Application aux structures en béton armé.

Romain Gontero¹, Alain Millard², Zakaria Djamai¹, Thierry Vidal¹, Alain Sellier¹

Remerciements : Luca Sorelli³, Ludovic Jason², Jean-Charles Le Pallec², Caroline Guérin²

(1) LMDC, INSA/UPS Génie Civil, 135 Avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 04 France.

(2) CEA DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S, bâtiment 607 - CEN Saclay 91191 Gif sur Yvette cedex

(3) UNIVERSITE LAVAL, 2325 Rue de l'Université, Québec, QC G1V 0A6, Canada



Université
de Toulouse



UNIVERSITÉ
LAVAL



INSA | INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
TOULOUSE

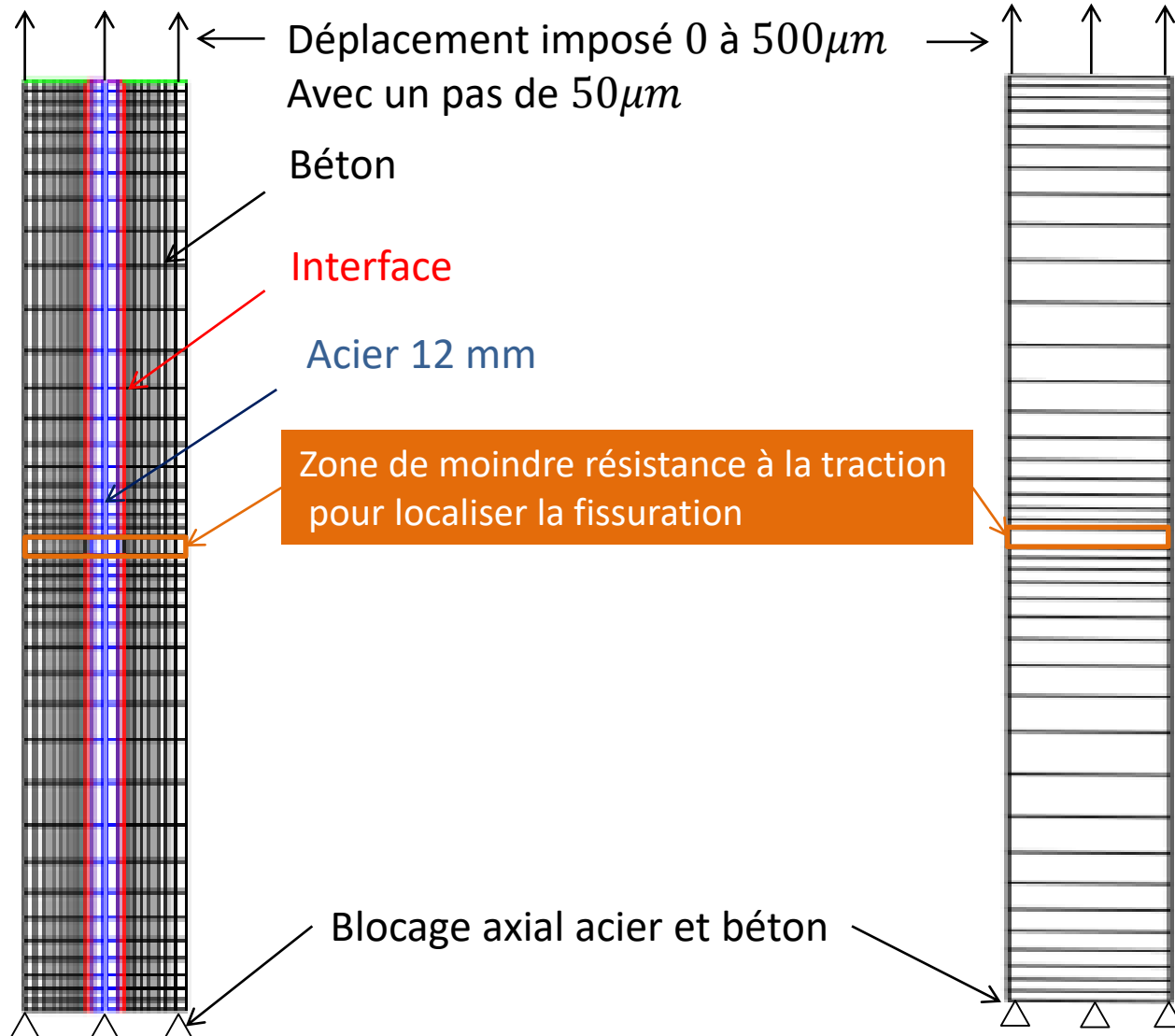


- Calcul de structures en béton armé jusqu'à la ruine
- Prise en compte des non-linéarités (endommagement, liaison AB, ...)
- Prédiction correcte des ouvertures de fissures
- Eviter le maillage de chaque renfort et de son interface AB
- Autres applications possibles (Ex : modèles de champs de phase à coefficients variables)

Exemple d'un tirant en BA

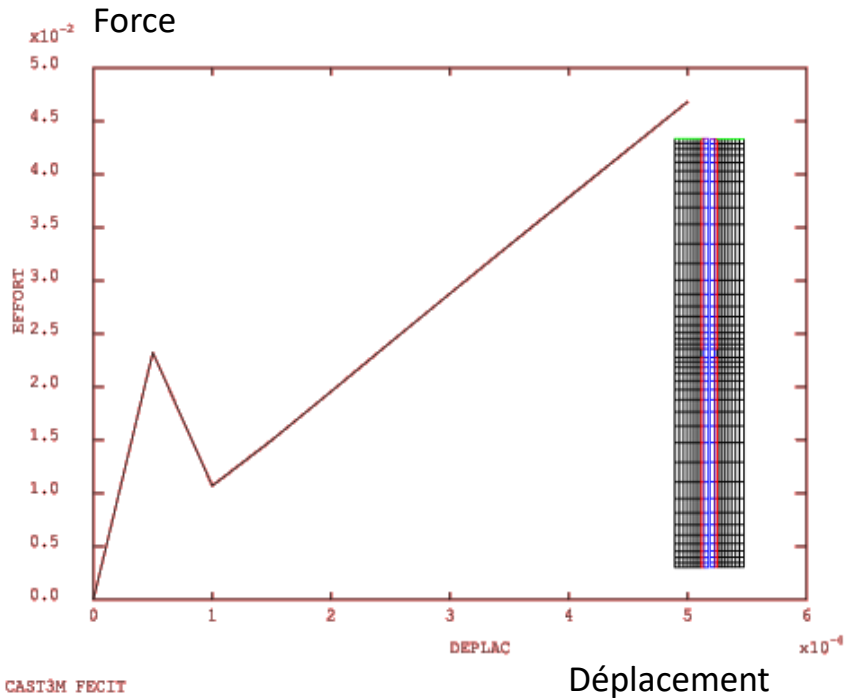
Béton armé avec une armature et une interface maillées

Béton armé homogénéisé (adhérence parfaite)

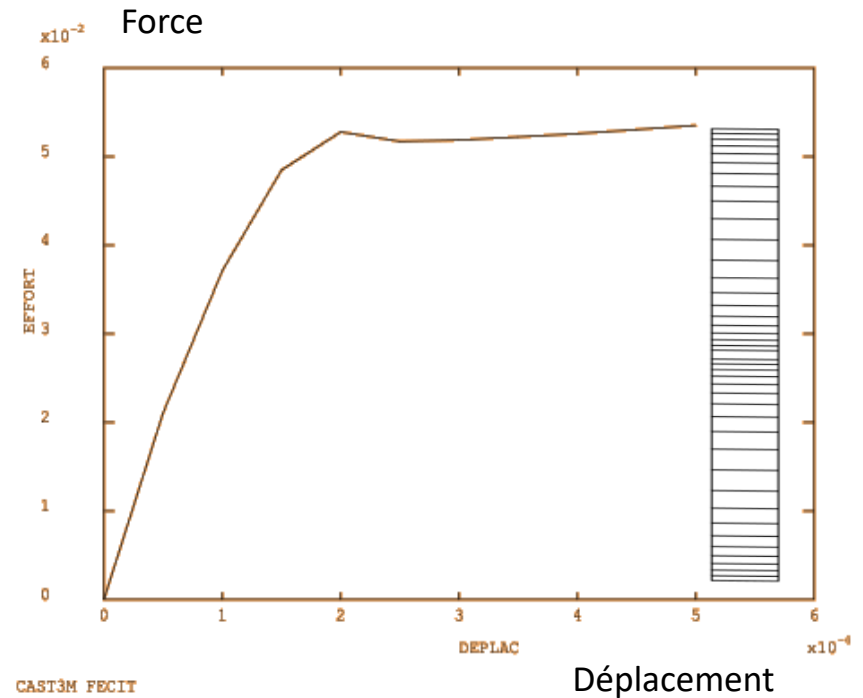


Erreur commise avec un modèle de BA homogénéisé classique

Solution à armatures et interfaces maillées, et à comportements élastiques



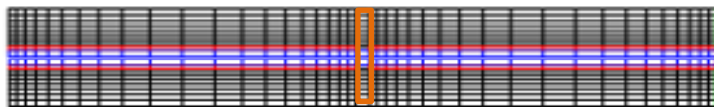
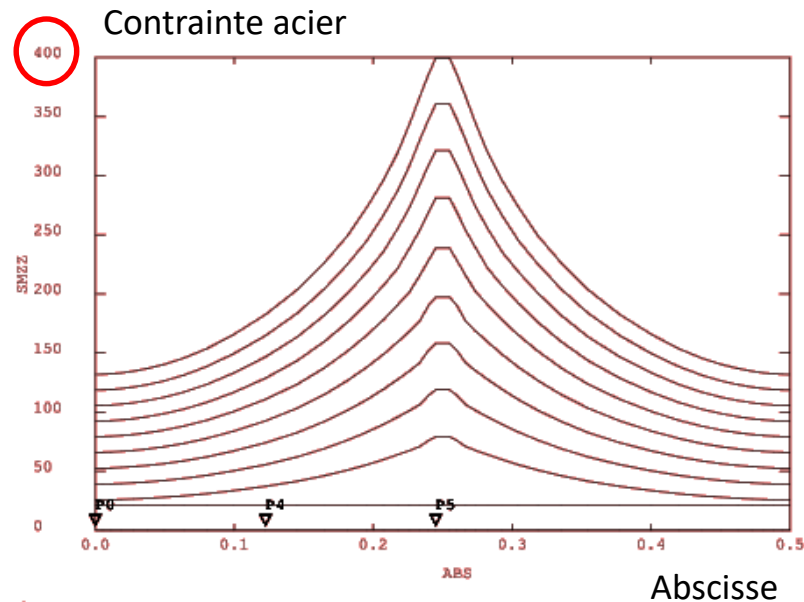
Solution homogénéisée adhérence parfaite



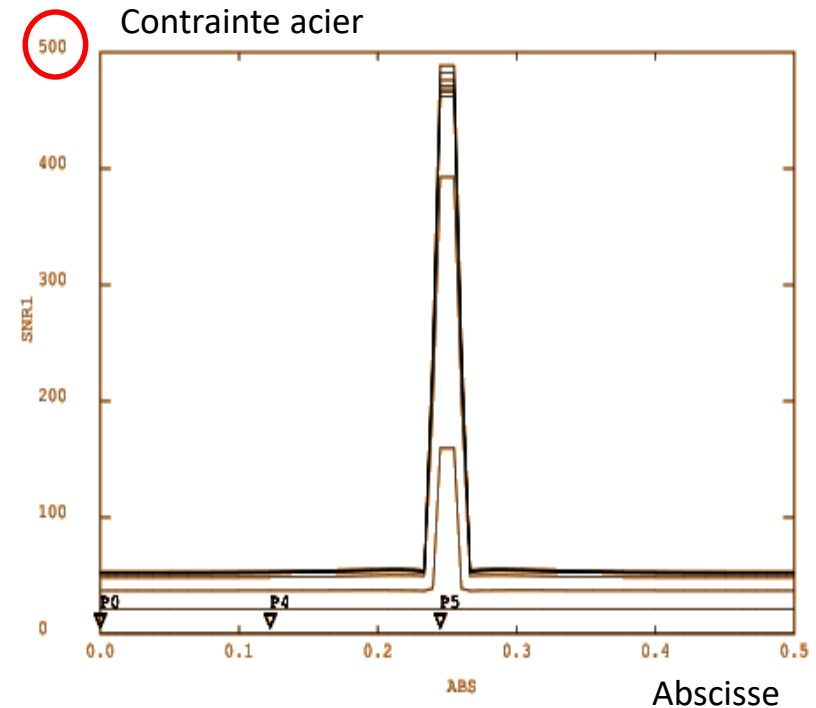
L'hypothèse d'adhérence parfaite du béton armé conduit à surestimer la rigidité du tirant

Erreur commise avec un modèle de BA homogénéisé classique

Solution à armatures et interfaces maillées



Solution homogénéisée adhérence parfaite

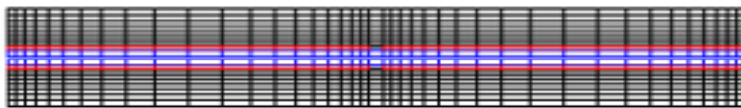
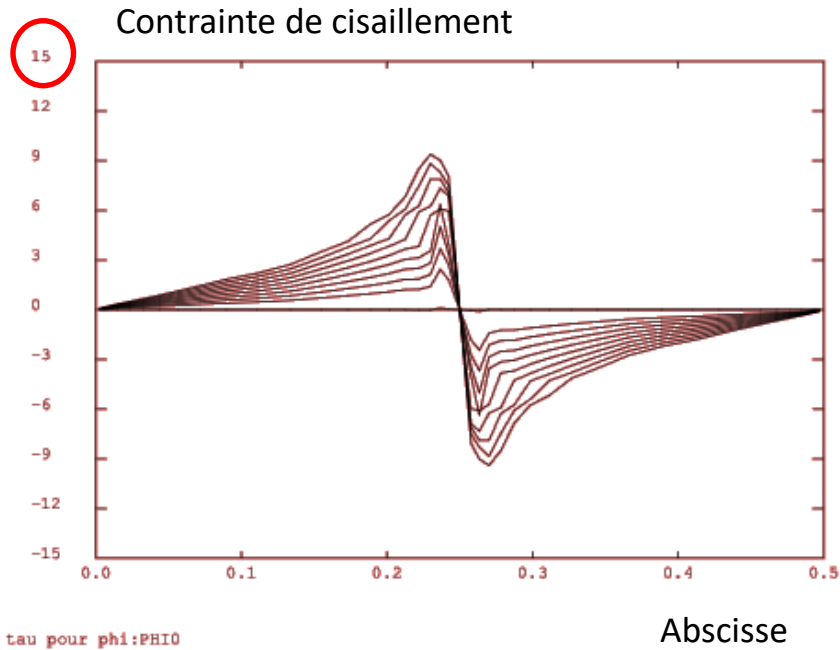


L'hypothèse d'adhérence parfaite du béton armé conduit à localiser la déformation de l'acier en fond de fissure, faussant l'ouverture de fissure et la force

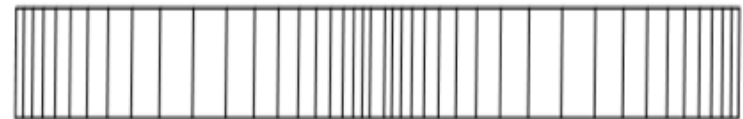
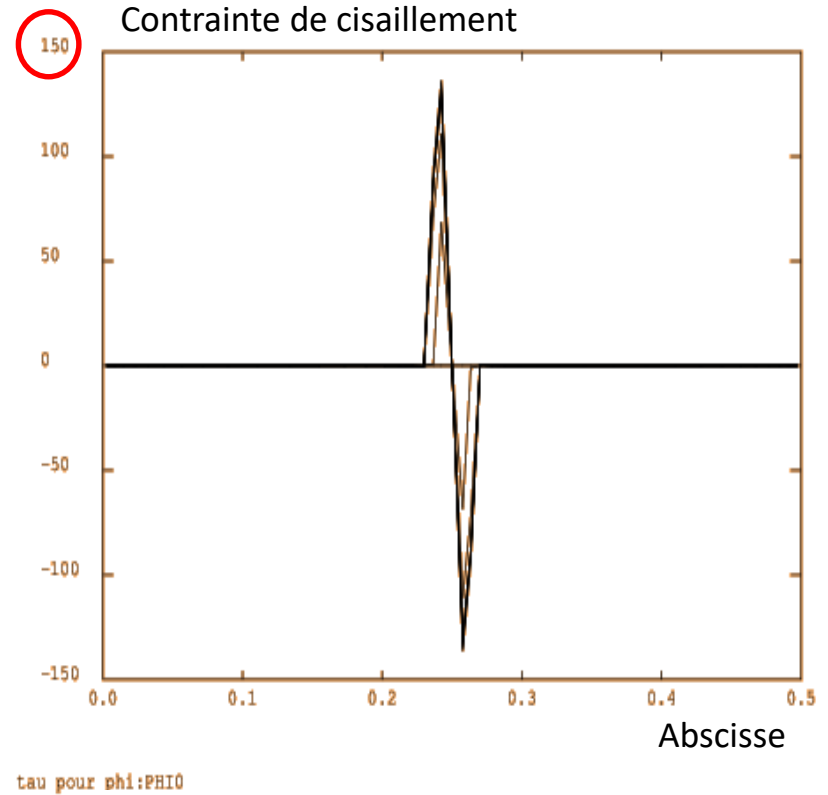
Exemple d'un tirant en BA

Erreur commise avec un modèle de BA homogénéisé classique

Solution à armatures et interfaces maillées



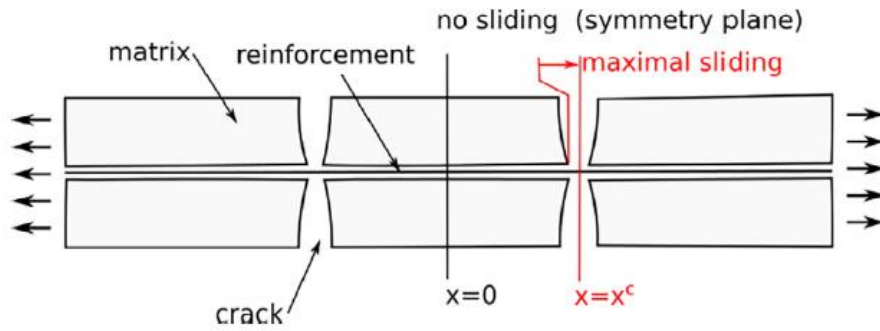
Solution homogénéisée adhérence parfaite



- Formulation non locale pour modéliser la liaison AB
- Mise en œuvre dans Cast3m
- Application : Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

- **Formulation non locale pour modéliser la liaison AB**
- Mise en œuvre dans Cast3m
- Application : Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

➤ Formulation non locale du glissement acier béton



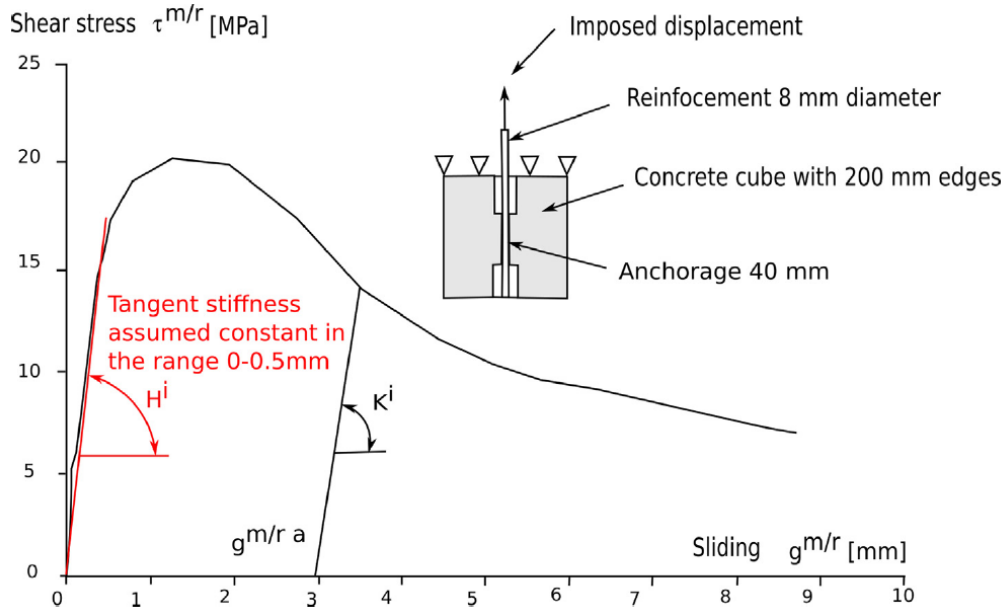
$$g^{m/r}(x) = \int_{\xi=0}^x (\epsilon^m - \epsilon^r) d\xi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g^{m/r}}{\partial x} = \epsilon^m - \epsilon^r$$

Le point où le glissement est maximal est le milieu de la fissure

Relation entre le glissement et les déformations de la matrice et du renfort

■ Test de type pull-out sur un acier



$$\tau^{m/r} = H^i g^{m/r}$$

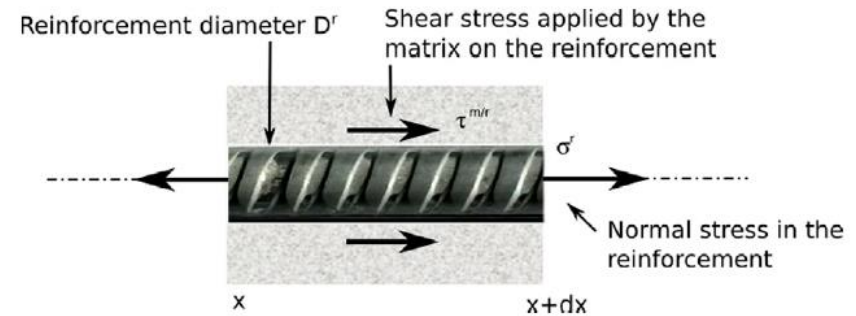
Relation entre l'adhérence et le glissement

➤ Formulation non locale du glissement acier béton

- Ecriture des équations relatives au renfort :

$$\frac{\partial^2 \sigma^r}{\partial x^2} \frac{D^r}{4} + \frac{\partial \tau^{m/r}}{\partial x} = 0 \longrightarrow \text{Equilibre du renfort}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma^r}{\partial x^2} &= E^r \frac{\partial^2 \epsilon^{re}}{\partial x^2} \\ \epsilon^r &= \epsilon^{re} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \text{Elasticité du renfort}$$



- En combinant les équations:

$$\epsilon^{re} - \frac{E^r D^r}{4H^i} \frac{\partial^2 \epsilon^{re}}{\partial x^2} = \epsilon^m$$

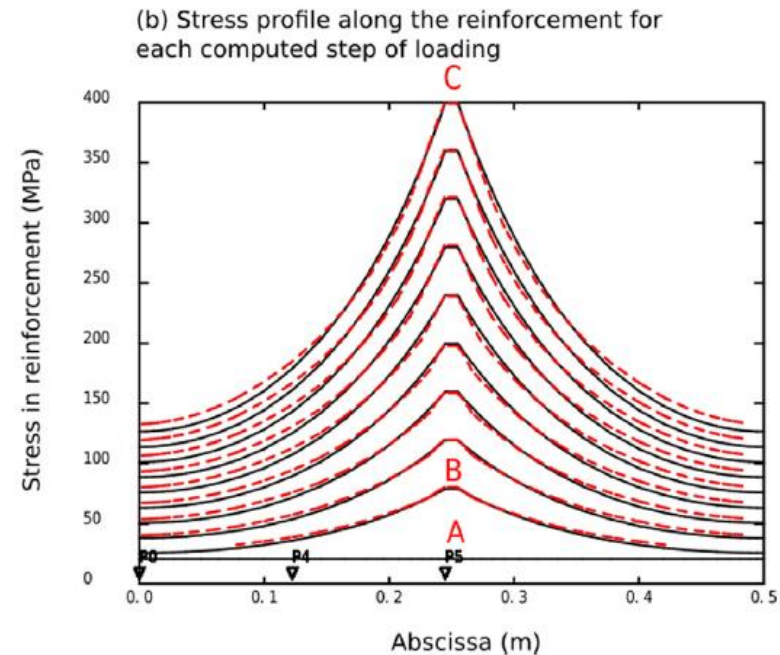
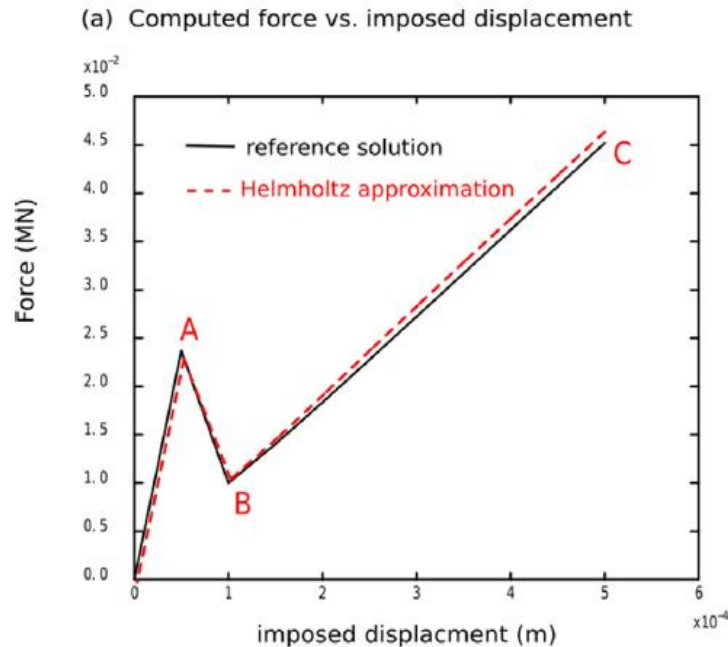
- En posant: $l_c^r = \sqrt{\frac{E^r D^r}{2H^i}}$ et $S = \epsilon^m$

$$\epsilon^{re} - \frac{l_c^r{}^2}{2} \frac{\partial^2 \epsilon^{re}}{\partial x^2} = S$$

Analogue à une équation de diffusion où l_c^r représente la longueur de diffusion de la déformation de l'acier de part et d'autre de la fissure

Equation de Helmholtz :

- Formulation non locale du glissement acier béton
- Comparaison des résultats pour le tirant à interface maillée et le tirant homogénéisé



La formulation d'Helmholtz est apte à gérer les faibles glissements renfort-matrice dans les éléments composites homogénéisés

- Formulation non locale pour modéliser la liaison AB
- **Mise en œuvre dans Cast3m**
- Application : Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

➤ Généralisation de la loi de comportement

Variables d'état locales

Variables d'état non locales



- $\sigma = f[\epsilon^t, X_1, X_2, \dots, X_{N_X}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_Y}]$ avec :

$$Y_i - \frac{[l_{c_i}(\vec{X})]^2}{2} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2} = S_i(\epsilon^t, \vec{X}) \quad \forall i = 1, N_Y$$

- Formulation variationnelle: $[M^H_i + K^H_i(l_{c_i}(\vec{X}))] Y_i = F^H_i(S_i(\epsilon^t, \vec{X})) \quad \forall i = 1, N$
- Conditions aux limites : $\frac{\partial Y_i}{\partial x} = 0$ sur $d\Omega_i$
- Application à la liaison acier-béton avec prise en compte des non-linéarités de l'acier et de la liaison : voir ci-après.

➤ Rappel : Algorithme de résolution global itératif - traitement du n-ème incrément

Initialisations

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Q^{(0)} = 0 \\ R^{(0)} = F^{ext}(t_{n+1}) - F^{int}(t_n) \end{array} \right.$$

Résolution

$$j = j + 1$$

Si accélération : $R^{(j)} = f_{acc}(R^{(j)}, R^{(j-1)}, R^{(j-2)}, R^{(j-3)})$

$$K^{(j-1)} \delta Q^{(j)} = R^{(j-1)}$$

$$\Delta Q^{(j)} = \Delta Q^{(j-1)} + \delta Q^{(j)}$$

Déformations totales

$$\varepsilon^t(t_{n+1})^{(j)} = \varepsilon^t(t_n) + B \Delta Q^{(j)}$$

Comportement

$$(\sigma(t_{n+1})^{(j)}, \vec{X}(t_{n+1})^{(j)}, \vec{Y}(t_{n+1})^{(j)}) = f(\varepsilon^t(t_{n+1})^{(j)}, \sigma(t_n), \vec{X}(t_n), \vec{Y}(t_n))$$

Forces intérieures

$$F^{int}(t_{n+1})^{(j)} = \int B^t \sigma(t_{n+1})^{(j)} d\Omega$$

Résidu

$$R^{(j)} = F^{ext}(t_{n+1}) - F^{int}(t_{n+1})^{(j)}$$

Test de convergence

$$\frac{\|R^{(j)}\|}{\|F_{ref}\|} < prec ?$$

➤ **Comportement** : cas de l'équation d'Helmholtz à coefficients constants

- 1-er appel à la loi de comportement en version locale : istep=1
- Calcul des opérateurs et de la source associés à l'équation de Helmholtz
- Résolution : calcul des variables d'état non locales
- 2-ème appel à la loi de comportement en version non-locale : istep=2

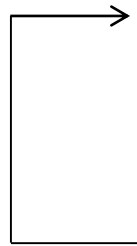
➤ Comportement : cas de l'équation d'Helmholtz à coefficients constants

Comportement
1-er appel

Istep = 1

$$(\sigma(t_{n+1})^{(j)}, \vec{X}(t_{n+1})^{(j)}) = f(\varepsilon^t(t_{n+1})^{(j)}, \sigma(t_n), \vec{X}(t_n), \vec{Y}(t_n), istep)$$

Résolution



$$\forall i = 1, \dots, N_Y$$

Calcul de M^H_i , $K^H_i(l_{ci})$ et $F^H_i(S_i^{(j)})$

$$[M^H_i + K^H_i(l_{ci})]Y_i(t_{n+1})^{(j)} = F^H_i(S_i^{(j)})$$

Istep = 2

$$(\sigma(t_{n+1})^{(j)}, \vec{X}(t_{n+1})^{(j)}) = f(\varepsilon^t(t_{n+1})^{(j)}, \sigma(t_n), \vec{X}(t_n), \vec{Y}(t_{n+1})^{(j)}, istep)$$

Comportement
2-ème appel

- **Comportement** : cas de l'équation d'Helmholtz à coefficients variables

$$\left[M^H_i + K^H_i \left(l_{c_i}(\vec{X}) \right) \right] Y_i = F^H_i \left(S_i(\epsilon^t, \vec{X}) \right)$$

- 1-er appel à la loi de comportement en version locale : istep=1
- Résolution non locale itérative :
 - ✓ Calcul des opérateurs et de la source associés à l'équation de Helmholtz
 - ✓ Calcul du résidu
 - ✓ Accélération de convergence éventuelle
 - ✓ Résolution: calcul des variables d'état non locales
 - ✓ 2-ème appel à la loi de comportement en version non-locale : istep=2
 - ✓ Test de convergence

➤ **Comportement** : cas de l'équation d'Helmholtz à coefficients variables

Comportement
1-er appel

Istep = 1

$$(\sigma(t_{n+1})^{(j)}, \vec{X}(t_{n+1})^{(j)}) = f(\varepsilon^t(t_{n+1})^{(j)}, \sigma(t_n), \vec{X}(t_n), \vec{Y}(t_n), istep)$$

Initialisations

Calcul de $M^H_i \quad \forall i = 1, \dots, N_Y \quad \vec{Y}(t_{n+1})^{(j,0)} = \vec{Y}(t_n)$

Résidu

→ k=k+1

→ $\forall i = 1, \dots, N_Y$

Calcul de $O^{H(j,k-1)} = M^H_i + K^H_i(l_{c_i}^{(k-1)})$ et de $F^H_i(S_i^{(j,k-1)})$

$$R^H_i^{(k-1)} = F^H_i(S_i^{(j,k-1)}) - O^{H(j,k-1)} Y_i(t_{n+1})^{(j,k-1)}$$

Si accélération: $R^{H(j,k-1)} = f_{acc}(R^{H(j,k-1)}, R^{H(j,k-2)}, R^{H(j,k-3)})$

Résolution

$$O^{H(j,k-1)} \delta Y_i^{(j,k)} = R^H_i^{(k-1)}$$

$$Y_i(t_{n+1})^{(j,k)} = Y_i(t_{n+1})^{(j,k-1)} + \delta Y_i^{(j,k)}$$

Comportement
2-ème appel

Istep = 2 $(\sigma(t_{n+1})^{(j,k)}, \vec{X}(t_{n+1})^{(j,k)}) = f(\varepsilon^t(t_{n+1})^{(j)}, \sigma(t_n), \vec{X}(t_n), \vec{Y}(t_{n+1})^{(j,k)}, istep)$

- Comportement : cas de l'équation d'Helmholtz à **coefficients variables**

$$\|\overrightarrow{RH}^{(k)}\| < prec ?$$

Test de
convergence

$$\|\overrightarrow{RH}^{(k)}\| = \text{Max}_{i=1, N_Y} \left[\frac{\sqrt{\left(R^H_i^{(k)}\right)^t \left(R^H_i^{(k)}\right)}}{G_{nor}^H_i \left(\vec{X}(t_n), \vec{Y}(t_n)\right)} \right]$$

Accélération de convergence : 2 méthodes possibles :

- Accélération de Cast3M (basée sur une approximation de l'opérateur tangent)
- Accélération de Jennings (inspirée de Aitken):
 - les différences entre 2 résidus successifs forment une suite géométrique
 - valeur accélérée du résidu par passage à la limite de la somme de la série

$$R^H_{acc}{}^{(j,k)} = R^H{}^{(j,k)} + \lambda \left(R^H{}^{(j,k)} - R^H{}^{(j,k-1)} \right)$$

avec :

$$\lambda = \frac{\left(R^H{}^{(j,k-1)} - R^H{}^{(j,k-2)} \right)^t \left(R^H{}^{(j,k-1)} - R^H{}^{(j,k)} \right)}{\left(R^H{}^{(j,k-1)} - R^H{}^{(j,k-2)} \right)^t \left(R^H{}^{(j,k)} - 2 R^H{}^{(j,k-1)} + R^H{}^{(j,k-2)} \right)}$$

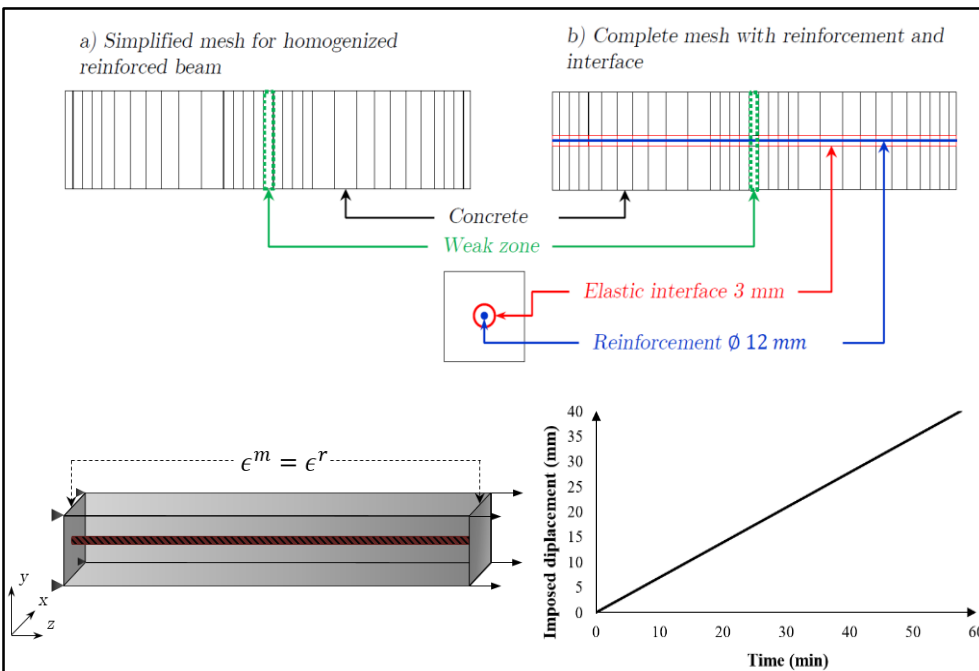
- Formulation non locale pour modéliser la liaison AB
- Mise en œuvre dans Cast3m
- **Application : Prédiction de la fissuration des structures en béton armé**

- Prédiction de la fissuration des structures en béton armé
 - Endommagement des renforts

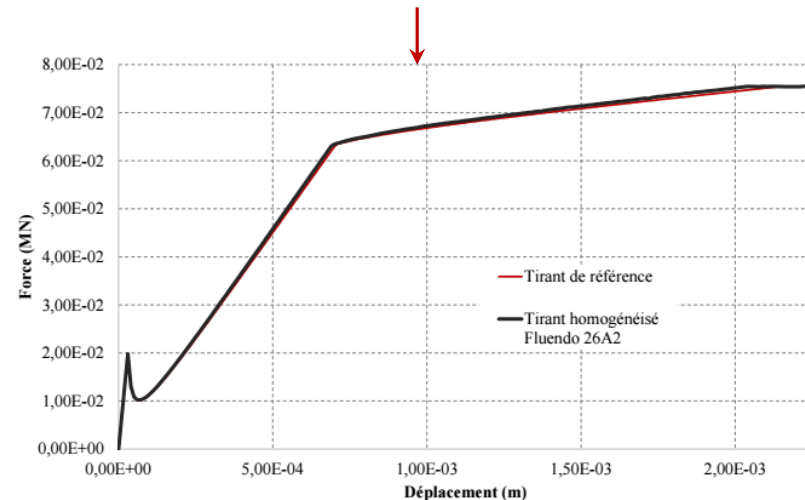
Reformulation de l'équation d'Helmholtz :

$$\sigma^r - \underbrace{\frac{(1 - D^r)E^r \phi^r}{4(1 - D^i)H^i}}_{\text{Coefficient de diffusion}} \frac{\partial^2 \sigma^r}{\partial x^2} = \underbrace{(1 - D^r)E^r (\epsilon^m - \epsilon^{r,pl})}_{\text{Terme de source}}$$

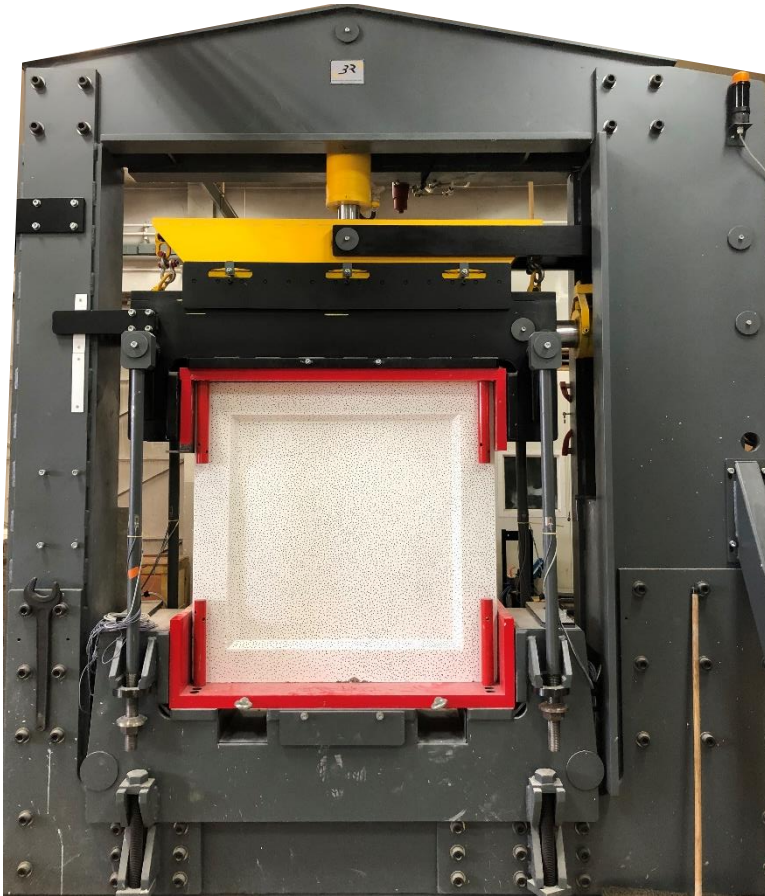
Test sur le tirant en béton armé :



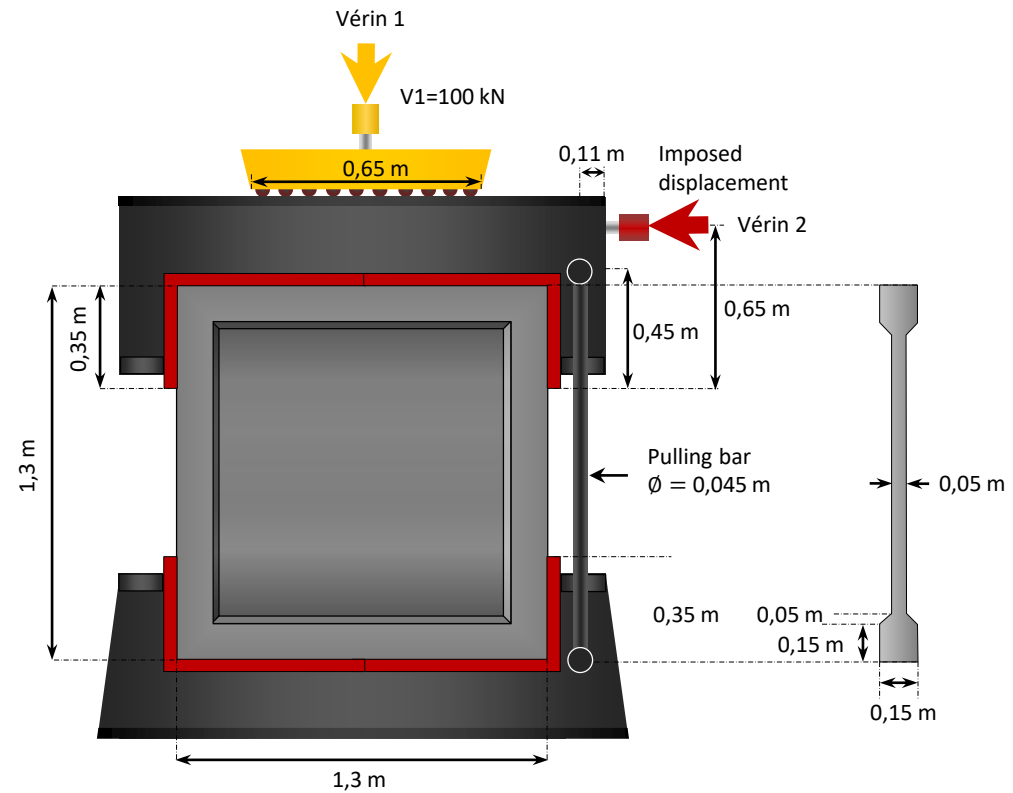
La non linéarité liée à la plasticité du renfort est correctement prise en compte



- Prédiction de la fissuration des structures en béton armé
- Calcul d'un mur en béton armé soumis à un essai de cisaillement



Presse spécifique capacité 100 T



Géométrie

➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

▪ Caractéristiques des matériaux :

Paramètres béton

Résistance à la compression	26 MPa
Module d'élasticité	31000 MPa

Paramètres acier

Module d'élasticité	210 GPa
Limite d'élasticité	560 MPa
Contrainte ultime	667 MPa

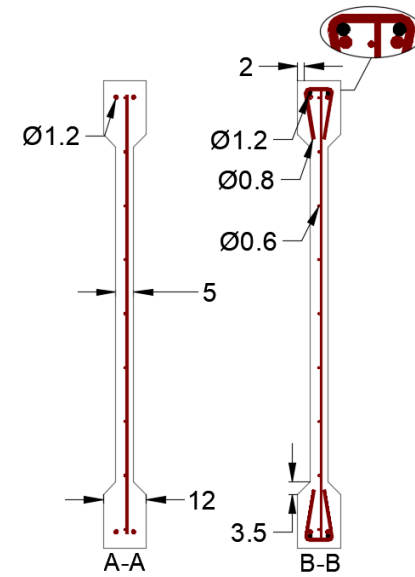
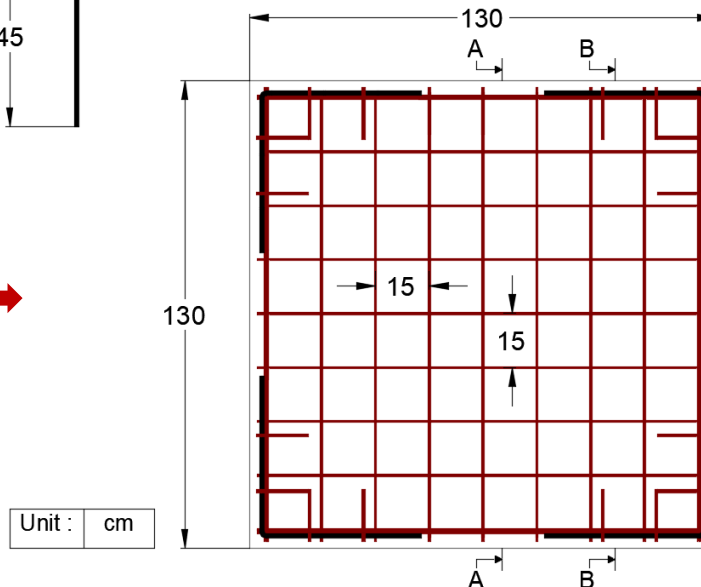
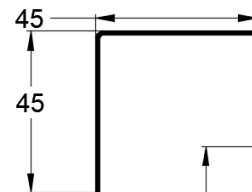
Paramètres de l'interface

Rigidité	40 GPa/m
Contrainte ultime	15 MPa

▪ Ferraillage du mur :

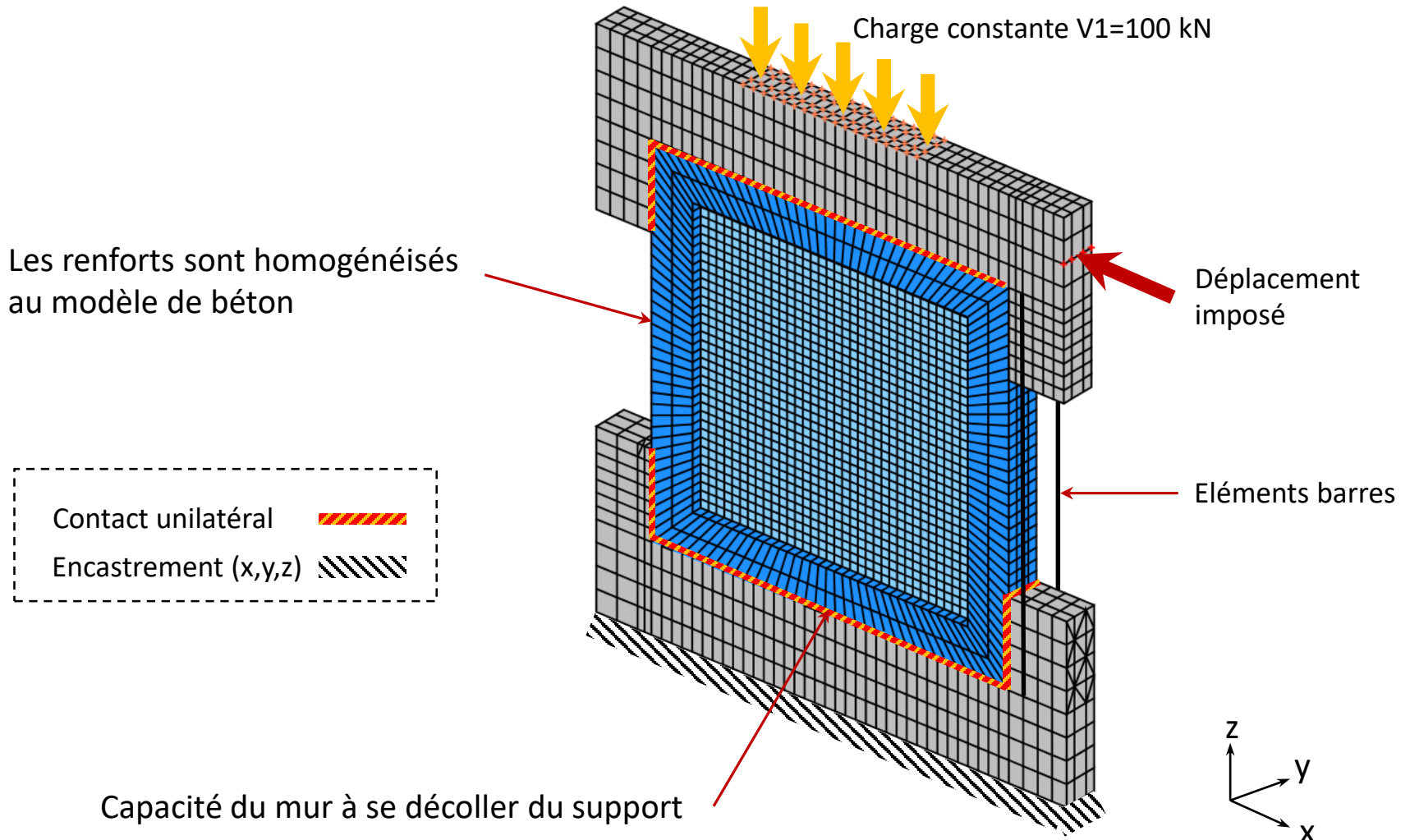


Peripheral reinforcement



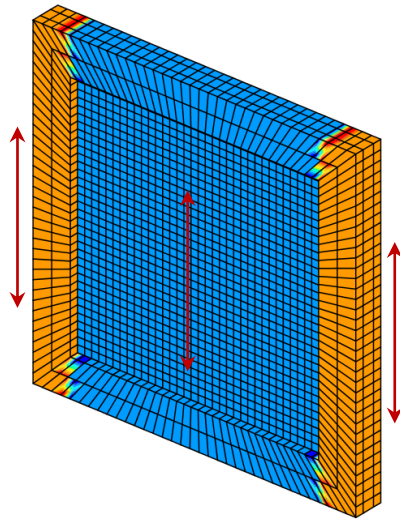
➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

- Maillage et conditions aux limites :

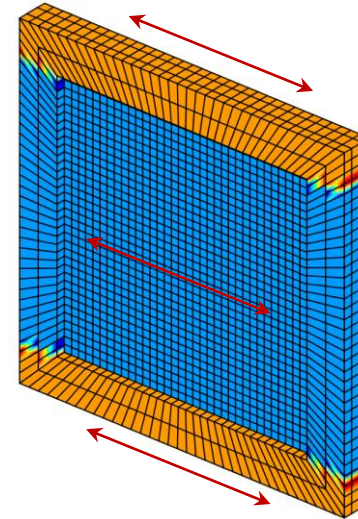


➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

- Paramètres de calcul : Renforts

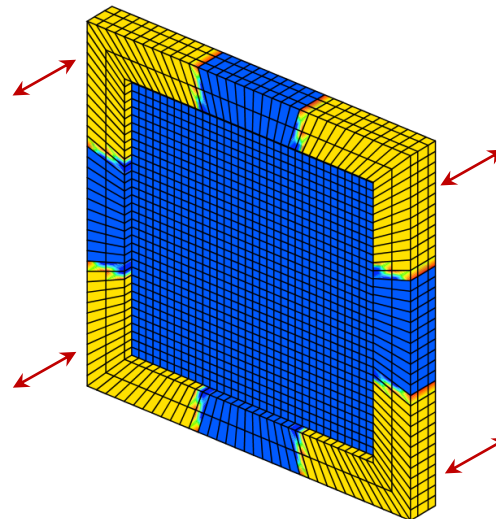


Renforts direction z-z



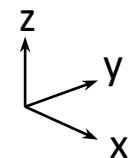
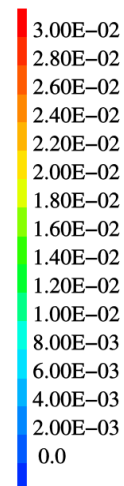
Renforts direction x-x

ρ_{acier}



Renforts périphériques direction y-y

ρ_{acier}



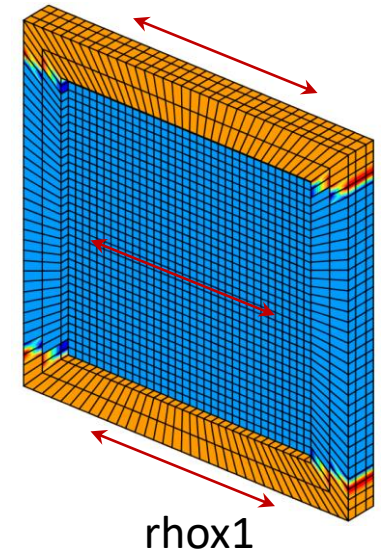
➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

▪ Paramètres de calcul :

Définition du modèle non local :

```
mod1=modele volm mecanique elastique
viscoplastique fluendo3D NON_LOCAL 'HELM' V_MOYENNE (MOTS 'UNI1' 'UNI2');
```

Deux variables non locales unidirectionnelles



Evolution reliant le paramètre matériau et le coefficient de diffusion de Helmholtz :

```
evs1=evol manu 'DFR1' (prog -1. 1.) 'DHU1' (prog -1. 1.);
```

Définition des paramètres du renfort N°1 :

```
matra1=mate mod1 roa1 rhox1 deq1 deqx1 yor1 210.0e3 syr1 560. HPL1 2000. DHU1 evs1 HIR1 40000.
tyr1 2000. vr11 1. vr12 0. vr13 0. vu11 1. vu12 0. vu13 0. SUR1 667. EPU1 0.07 WPR1 1.;
```

Direction de la « diffusion » du glissement

Définition de la valeur du résidu des sous-itérations d'Helmholtz en précision relative :

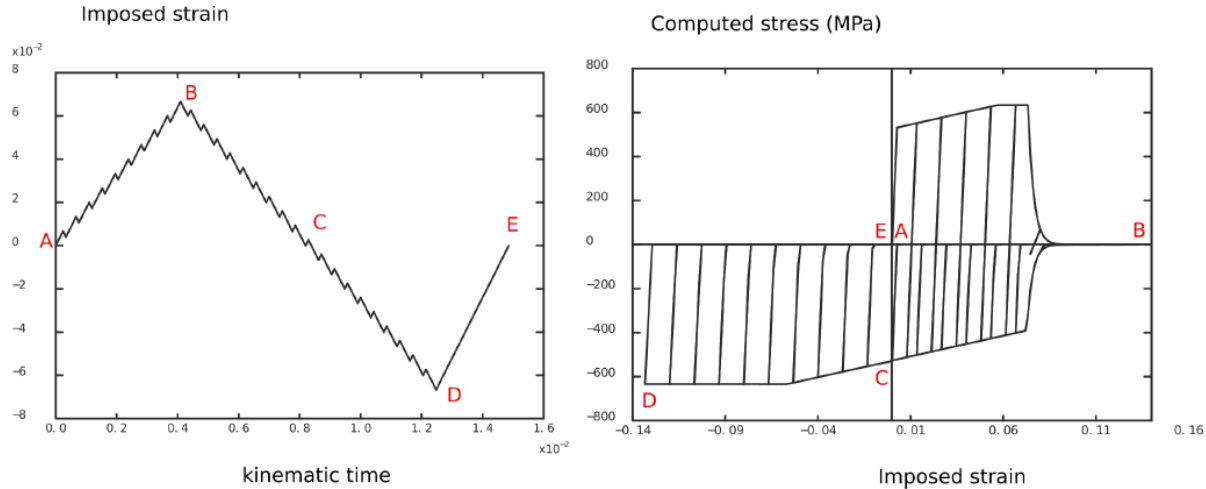
```
tab1.precsousiteration= 1.0e-6;
```

Dans le cas présent : $\|\overrightarrow{R^H}\| = \text{Max}_{i=1, N_Y} \left[\frac{\sqrt{(R^r_i)^t (R^r_i)}}{\bar{\sigma}} \right]$ Avec : $R^r_i = \sigma^r - D^H \nabla^2 \sigma^r - S$

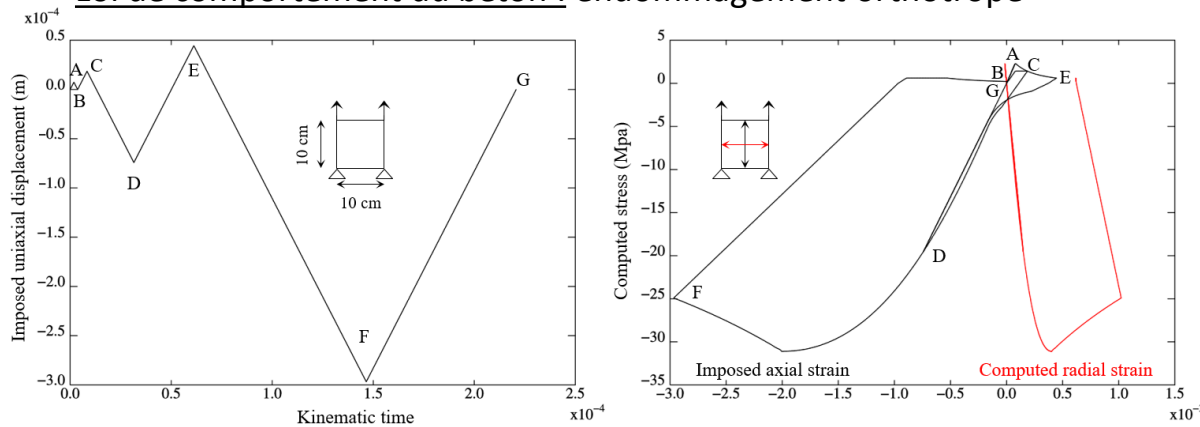
➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

■ Paramètres de calcul :

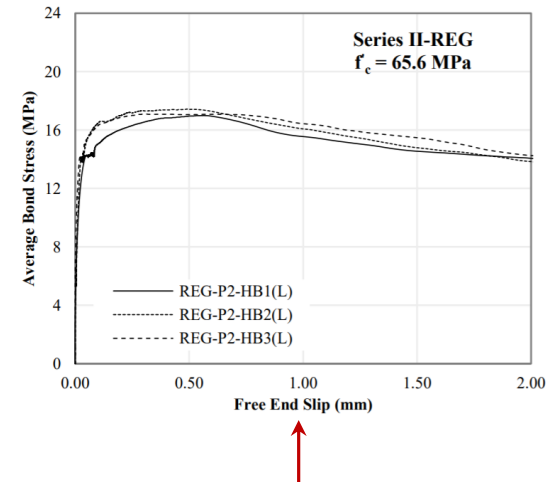
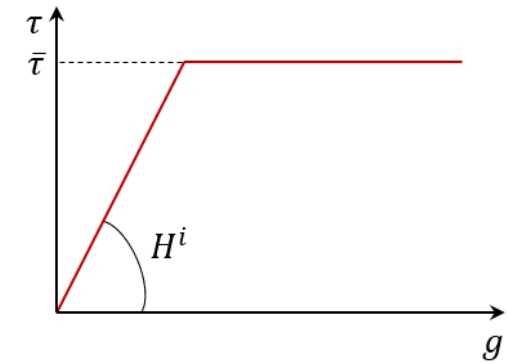
Loi de comportement du renfort : Plasticité cinématique, endommagements de palier et post-pic



Loi de comportement du béton : endommagement orthotrope



Loi de comportement de l'interface : Endommagement de palier



Essai de pull-out sur renfort HA

➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

▪ Calcul :

Affichage du résidu des sous-itérations non locales : Phase linéaire (élasticité des renforts) :

1^{ère} étape non locale :

Istep = 1

2^{ème} étape non locale :

Istep = 3

3^{ème} étape non locale :

Istep = 2 → non affiché

```
Numero du pas :30  Indice d evolution :31 -> temps : 1.50000E-05
Initialisation a partir de la solution precedente Coeff 1.00000E+00
  Iter      Nplas      Critere      Deps.max      Eps.max      Crit.flex
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:1 ISTEP:1
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:2 ISTEP:3 CRITERE: 1.00974E-19
  1          0  5.61043E-03  1.00000E-06  3.00000E-05  5.61043E-03
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:1 ISTEP:1
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:2 ISTEP:3 CRITERE: 9.87266E-20
  2          0  6.22789E-10  1.00000E-06  3.00000E-05  6.22789E-10
***** CONVERGENCE A L ITERATION 2 SOUS-PAS 0
```

Multiples sous itérations :

Phase de plasticité des renforts

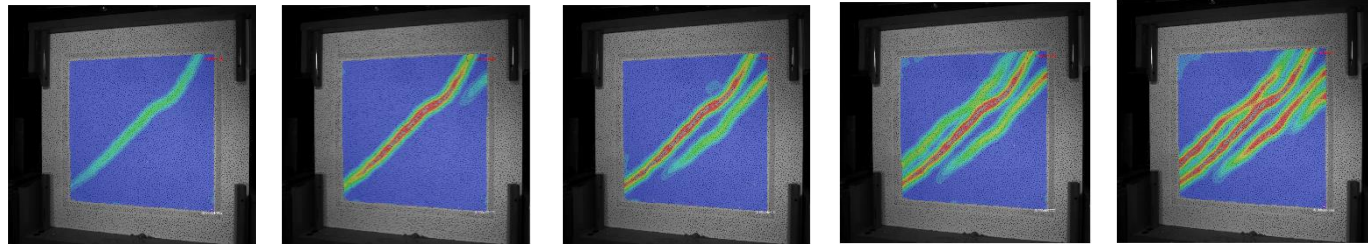
```
Numero du pas :262  Indice d evolution :263 -> temps : 7.20000E-04
Initialisation a partir de la solution precedente Coeff 1.00000E+00
  Iter      Nplas      Critere      Deps.max      Eps.max      Crit.flex
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:1 ISTEP:1
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:2 ISTEP:3 CRITERE: 1.29017E-06
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:3 ISTEP:3 CRITERE: 1.20141E-06
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:4 ISTEP:3 CRITERE: 1.11884E-06
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:5 ISTEP:3 CRITERE: 1.04203E-06
act3 : reduction a 1 dimensions
SOUS ITERATION HELMHOLTZ:6 ISTEP:3 CRITERE: 9.70582E-07
menage automatique 4 apres REDU gain: 12081684 actifs 12183312 mots 395190 segments
  1          0  7.37427E-04  1.37538E-03  9.12881E-02  7.37427E-04
```


➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

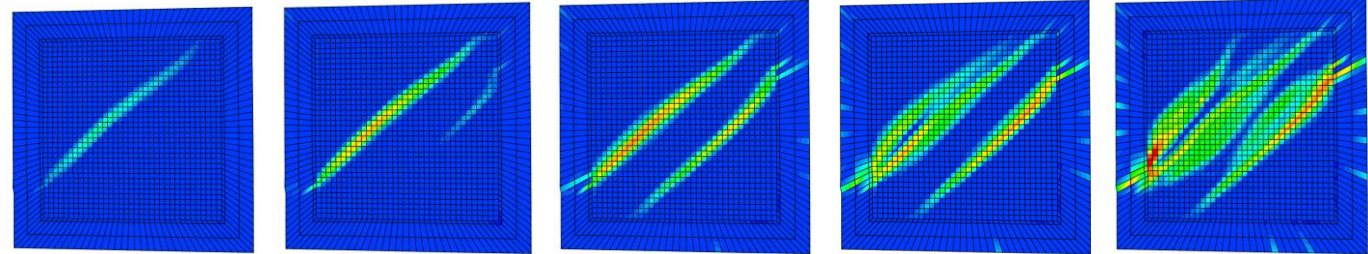
▪ Résultats :

Déformation principale N°1 du béton armé

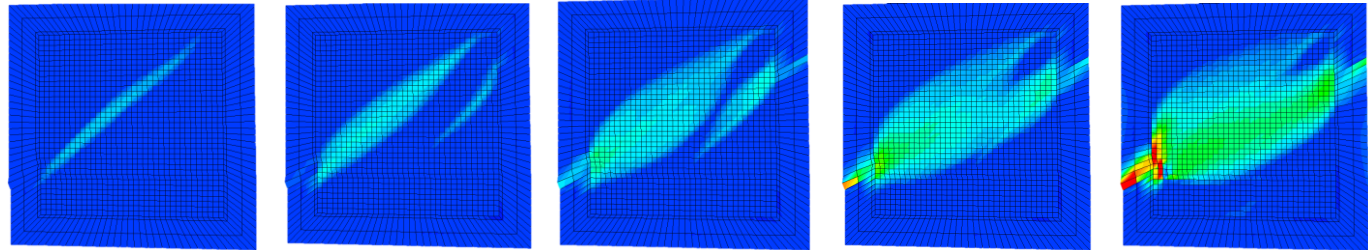
Résultats
expérimentaux :



Modèle avec
glissement :



Modèle sans
glissement :



Charge
horizontale :

250 kN

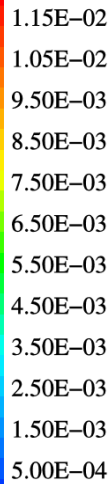
400 kN

480 kN

500 kN

570 kN

ϵ_I



En présence de glissement acier-béton la déformation du béton se localise mieux

➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

▪ Résultats :

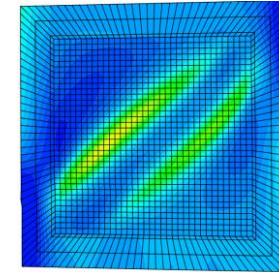
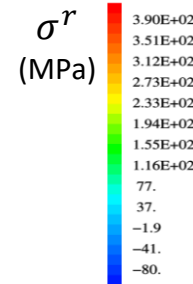
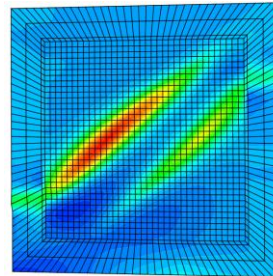
Charge horizontale : 480 kN

Direction x

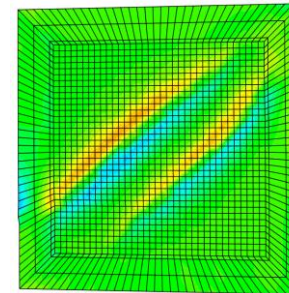
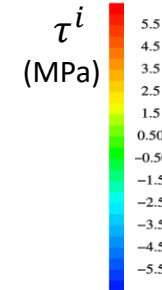
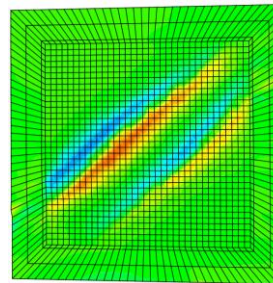
Direction z



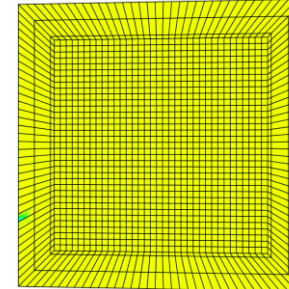
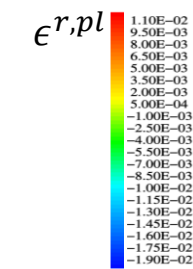
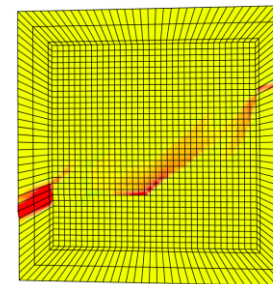
Contrainte dans les renforts :



Contrainte de cisaillement à l'interface des renforts :



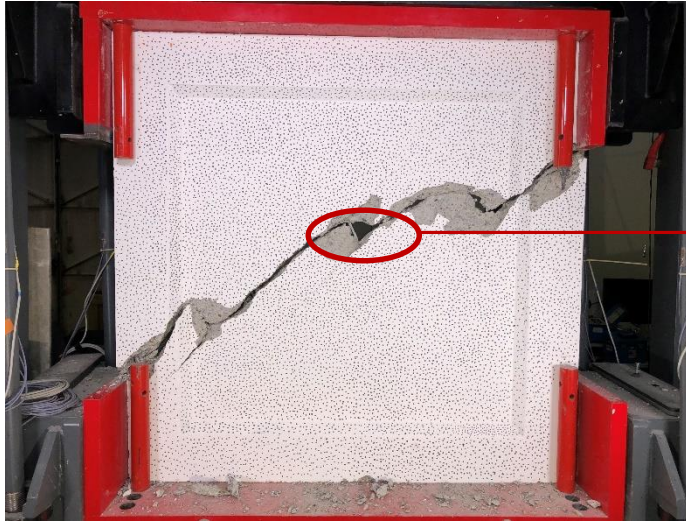
Déformations plastiques dans les renforts au dernier pas convergé :



Possibilité de calculer les contraintes axiales et d'interface pour des renforts non maillés

➤ Prédiction de la fissuration des structures en béton armé

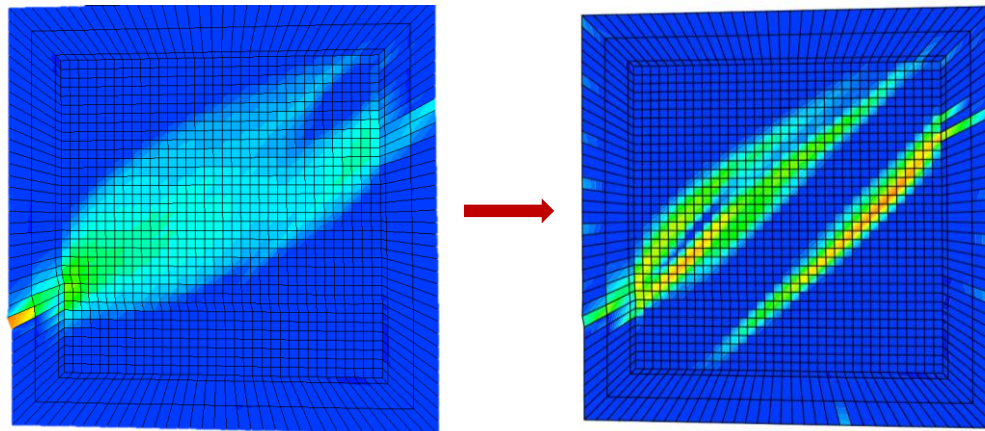
- Perspectives : Endommagement des renforts
Les renforts horizontaux sont rompus durant l'essai



- Mise en place d'un endommagement localisé des renforts : source de non-linéarité dans l'équation d'Helmholtz
- La phase de localisation de l'endommagement du renfort pose problème
- Possibilité de traiter des endommagements non locaux avec directions de diffusions et longueurs non locales variables
- Applicable au champs de phases
- Application au cas des bétons fibrés

- Possibilité de résoudre des équations de Helmholtz non linéaires dans Castem
- Fait appel à des sous-itérations avec accélération de convergence
- Chaque modèle utilisant cette méthode doit être adapté

- Exemple d'application au BA
 - L'endommagement des aciers ou de l'interface induisent des non linéarités de l'équation d'Helmholtz
 - Le maillage est facilité car les aciers sont homogénéisés
 - Les densités d'acier sont des champs
 - Les orientations des aciers sont des champs de vecteurs
 - Accès aux contraintes dans les aciers et à l'interface sans maillage (variables internes du modèle)
 - Le champ de déformations dans le béton dépend fortement de la raideur des interfaces



Traitement numérique non local de comportements non-linéaires par l'équation d'Helmholtz à coefficients variables.

Application aux structures en béton armé.

Romain Gontero¹, Alain Millard², Zakaria Djamai¹, Thierry Vidal¹, Alain Sellier¹

Remerciements : Luca Sorelli³, Ludovic Jason², Jean-Charles Le Pallec², Caroline Guérin²

(1) LMDC, INSA/UPS Génie Civil, 135 Avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 04 France.

(2) CEA DEN/DANS/DM2S/SEMT/LM2S, bâtiment 607 - CEN Saclay 91191 Gif sur Yvette cedex

(3) UNIVERSITE LAVAL, 2325 Rue de l'Université, Québec, QC G1V 0A6, Canada

Merci pour votre attention !



Université
de Toulouse



UNIVERSITÉ
LAVAL



INSA | INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
TOULOUSE

