



جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa



Club CAST3M, 27/11/2020

# Estimation d'erreur à postériori et adaptation de maillages pour les modèles endommageables en approche non locale

*Présenté Par : Abdelhamid BECHEUR  
Enseignant chercheur  
Maitre de conférences HDR  
Université A. Mira Bejaia Algérie*

**Auteurs :**

**Abdelhamid BECHEUR (a), Abdelouhab MEDJAHED (b), Patrice COOREVITS (c)**

(a) Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement LRHAE. Université de Bejaia. Thargua-ouzemour Bejaia 06000 Algerie .  
email : [abdelhamid.becheur@univ-bejaia.dz](mailto:abdelhamid.becheur@univ-bejaia.dz)

(b) Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement LRHAE. Université de Bejaia. Thargua-ouzemour Bejaia 06000 Algerie.  
email : [contactsmedjahed@yahoo.fr](mailto:contactsmedjahed@yahoo.fr)

(c) Laboratoire Eco-PRocédés et Aide A la Décision EPROAD – UPRES EA 4669 Université de Picardie Jules Verne. France  
email : [patrice.coorevits@u-picardie.fr](mailto:patrice.coorevits@u-picardie.fr)

# SOMMAIRE

**I. Introduction**

**II. Quelques modèles d'endommagement (rappels)**

**III. L'indicateur d'erreur développé**

**IV. Propriétés de l'indicateur développé**

IV.1 Analyse de la convergence de l'erreur

IV.2 Indice d'efficacité

IV.3 Influence de la longueur caractéristique

**V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests**

**VI. Discussion et conclusion**

**Quelques références**

# I. Introduction

# I. Introduction

Pour l'utilisateur de toute méthode de simulation numérique (basée dans notre cas sur la MEF), deux questions peuvent (ou plutôt doivent) se poser :

1- Quelle est la qualité de la solution approchée obtenue vis-à-vis de la solution exacte ou dans le cas échéant, vis-à-vis d'une solution de référence ?

2- Comment optimiser les paramètres du calcul pour garantir une précision donnée tout en minimisant les coûts de calcul ?

# I. Introduction (suite)

Deux catégories complémentaires d'estimateurs d'erreurs :

- la première dite : à priori est d'ordre qualitative et étudie mathématiquement les conditions de convergence de la solution approchée vers la solution exacte (ou de référence)

- la seconde dite : à postériori est d'ordre quantitative et analyse après tout calcul EF les résultats des calculs et leur convergence vers la solution exacte (ou de référence)

# I. Introduction (suite)

Pour les problèmes linéaires : il existe essentiellement dans la littérature trois démarches :

- travaux de Babuska-Rheinboldt (1978) : estimateur d'erreur basé sur la notion de défauts d'équilibre : Estimateur nommé **BR**
- Indicateurs d'erreurs de Zienkiewicz et Zhu (1987 et 1992) utilisation de techniques de lissage des champs de contraintes : indicateur dit **ZZ'** (version 1987) et **ZZ<sup>2</sup>** (version 1992)
- travaux de Ladeveze (1983) (Estimateur dit **L**) : erreur en relation de comportement basée sur des techniques associées de construction de champs statiquement (pour les contraintes) et cinématiquement (pour les déplacements) admissibles (ou acceptables). Ces champs sont donc supposés vérifier rigoureusement les équations d'équilibre et les liaisons cinématiques.

# I. Introduction (suite)

**Pour les problèmes non-linéaires de la mécanique de l'endommagement, les travaux relatifs à cette problématique sont peu abondants.**

## **On peut citer:**

- L'estimateur basé sur les résidus et des calculs locaux a été développé par Rodriguez-Ferran et Huerta en 2000.
- L'estimateur de Comi et Perego (2002) ont adapté l'erreur dans les relations de comportement développée par Ladeveze à un modèle d'endommagement non local qu'ils ont développé.

**La principale difficulté** : la mise en œuvre et l'implantation de ces estimateurs présente de grandes difficultés et semble nécessiter des efforts considérables de programmation.

# I. Introduction (suite)

**Notre objectif** : la mise au point d'une méthode d'estimation d'erreur avec les qualités suivantes :

1. relativement moins difficile dans sa mise en œuvre
2. être capable d'estimer correctement et suffisamment les erreurs de discrétisation inhérentes aux maillages des structures endommagées.





جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa

Club CAST3M, 27/11/2019

## II. Quelques modèles d'endommagement (rappels)

## II. Quelques Modèles endommagement (rappels)

Théorie de la mécanique de l'endommagement : Analyse des dommages dans les structures

Son objectif : tenir compte de la perte progressive de la raideur matérielle due à la propagation et à la coalescence de microfissures et de microvides dans la structure.

Pour caractériser la densité et l'orientation de ces micros défauts → introduction d'une variable locale  $d$  d'endommagement représentative de ces dommages,

Un premier modèle d'endommagement a été mis au point pour la première fois par Kachanov en 1958,

D'autres modèles ont suivi : Rabotnov (1969), Lemaitre et Mazars (1975), Lemaitre et Chaboche (1980), le modèle très utilisé de De Vrie et al. (en 1995) nommé également MVM ( Von Mises modifié), etc .

Pour les cas de chargement monotones : modèle de Mazars avec ses deux versions (en 1984 et 2014).

Pour les chargements cycliques et pour nos simulations, le modèle nommé RICRAG développé par Richard et al. (en 2010) a été utilisé. Ce modèle est non seulement relativement récent mais également efficace.

## II. Quelques Modèles endommagement (rappels)

### Qu'en est il alors de l'approche non locale ?

**Le Problème posé** : les modèles dits « locaux » ne sont pas adaptés aux matériaux ayant un comportement adoucissant (Bazant, 1986).

**La cause** : dès que le maillage est raffiné, la localisation tend vers des zones de plus en plus petites.

**En Conséquence** : l'énergie dissipée lors de la rupture a tendance à s'annuler. **Résultat physique inacceptable** (Needleman, 1988).

**Solution apportée** : Mise au point de différents limiteurs de localisation (Exemples : Pijaudier-cabot et Bazant, Desoyer, Fremond et Nedjar, etc.)

### **Exemple de limiteurs de localisation :**

- Méthode de Pijaudier-cabot et Bazant (en 1987) : l'une des techniques les plus utilisées.
- Une amélioration de cette technique : méthode basée sur les états de contraintes (ou Stress Based Method SBM) a été proposée par Giry et al. (2011). Cette dernière a été utilisée lors de nos simulations.

## II. Quelques Modèles endommagement (rappels)

### Bref rappel du modèle utilisé de Richard et al (2010) (RIC-RAG) et de la méthode de régularisation en approche non locale :

$$d = 1 - \frac{1}{1 + \left( A_{\text{Dir}} H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ \langle \sigma_{ij} \rangle_+) + A_{\text{Ind}} \left( 1 - H(\langle \varepsilon_{ij} \rangle_+ \langle \sigma_{ij} \rangle_+) \right) \right) (\bar{Y}^{nl} - Y_0)}$$

$A_{\text{Dir}}$  et  $A_{\text{Ind}}$  sont des paramètres matériaux décrivant la fragilité du béton respectivement en traction et en compression,  $H$  est la fonction d'Heaviside.

L'approche non locale utilisée est basée sur les contraintes développée par Giry et al. (2011). Elle consiste à faire la moyenne de la surface de seuil d'endommagement au voisinage du point de Gauss courant. A cet effet, le taux de restitution d'énergie d'endommagement local est remplacé par le taux non local  $\bar{Y}^{nl}$  tel que la surface de seuil d'endommagement devienne:

$$f_d^{nl} = \bar{Y}^{nl} - (Y_0 + Z) \text{ and } \dot{d} = \dot{\lambda}_d \cdot \frac{\partial f_d}{\partial \bar{Y}^{nl}}$$

$$\bar{Y}^{nl}(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Omega(\mathbf{x})} W(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \bar{Y}(\mathbf{s}) ds}{\int_{\Omega(\mathbf{x})} W(\mathbf{x} - \mathbf{s}) ds}$$

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = \exp \left[ - \left( \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}{l_c \cdot \rho(\mathbf{x}, \sigma_{\text{prin}}(\mathbf{s}))} \right)^2 \right]$$

$W(\mathbf{x} - \mathbf{s})$  est la fonction poids appelée aussi fonction de distribution de Gauss définissant l'interaction entre le point considéré situé en  $\mathbf{x}$  et les points voisins situés en  $\mathbf{s}$  et  $l_c$  la longueur caractéristique délimitant le voisinage à moyenner autour du point de Gauss considéré.

# III. L'indicateur d'erreur développé

### III. L'indicateur d'erreur développé

**L'idée :** Mettre au point un nouvel indicateur d'erreur utilisant à la fois les techniques de lissage locales au sens de la méthode des moindres carrés.

Les solutions d'éléments finis en champ des contraintes  $\sigma_h$  et en champ d'endommagement  $d_h$  sont lissées et considérées comme des solutions de référence :  $\tilde{\sigma}_h$  et  $\tilde{d}_h$ .

Cette technique de lissage a été développée par Hinton et Campbell (1974) et Hinton et al (1975). Bien qu'ancienne, cette méthode, s'est révélée non seulement simple à mettre en œuvre mais également efficace.

Par la suite, l'indicateur d'erreur développé a été construit par la combinaison explicite de deux termes. Le premier est basé sur l'erreur obtenue par la différence de norme énergétique entre la solution de contrainte lissée et la solution éléments finis non lissée. De la même manière, la seconde considère l'erreur obtenue par la différence entre la solution d'endommagement lissée et celle obtenue numériquement :

En erreur absolue :

$$e_s = \left[ \|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2 + C_d \cdot \int_{\Omega} (\tilde{d}_h - d_h)^2 d\Omega \right]^{1/2}$$

En erreur relative:

$$\varepsilon = \left[ \frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2}{\|\tilde{\sigma}_h + \sigma_h\|_{\sigma, \Omega}^2} + \frac{\int_{\Omega} (\tilde{d}_h - d_h)^2 d\Omega}{\int_{\Omega} (\tilde{d}_h + d_h)^2 d\Omega} \right]^{1/2}$$

$C_d$  un paramètre positif, constant et non nul qui a la même dimension que la norme d'énergie de l'erreur et qui est à priori inconnu.

# IV. Propriétés de l'indicateur développé

## IV. Propriétés de l'indicateur développé

Pour pouvoir optimiser le maillage par rapport à une erreur prescrite par l'utilisateur (et donc de réduire les coûts de calcul), la connaissance des propriétés du présent indicateur d'erreur est nécessaire.

A cet effet, il s'agit de :

- l'analyse des propriétés de convergence de l'erreur avec le raffinement du maillage
- L'analyse de l'indice d'efficacité de cet indicateur
- et enfin de l'influence d'un paramètre important qui est la longueur caractéristique.



# IV.1 Analyse de la convergence de l'erreur

# IV.1 Analyse de la convergence de l'erreur

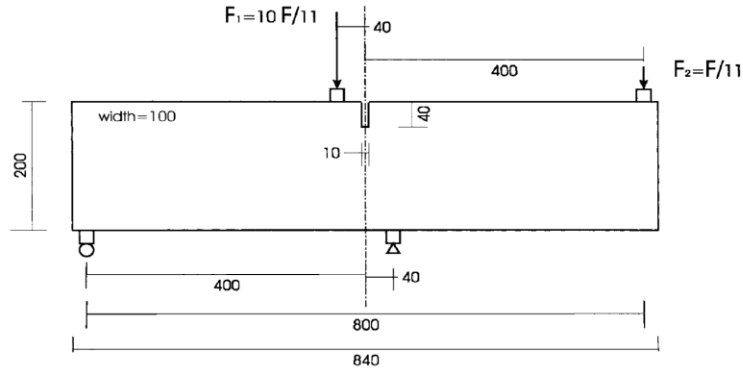
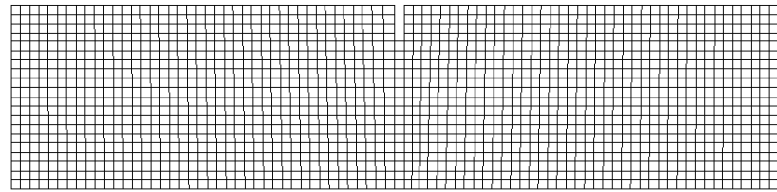
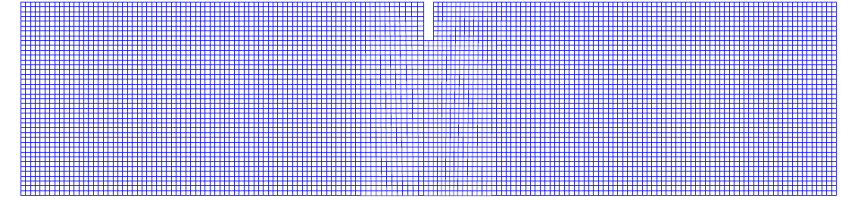


Figure 01 : poutre à une seule entaille (SENB test)



a) initial Mesh of 1676 QUA4 elements and 1785 nodes with uniform element size ( $h=10\text{mm}$ )



b) First refinement: Mesh of 6704 elements and 6921 nodes with uniform element size ( $h=5\text{mm}$ )

Figure 02: Mesh refinement examples of SENB test

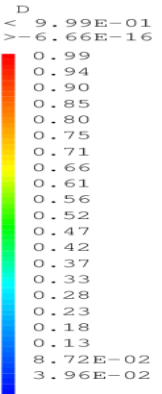
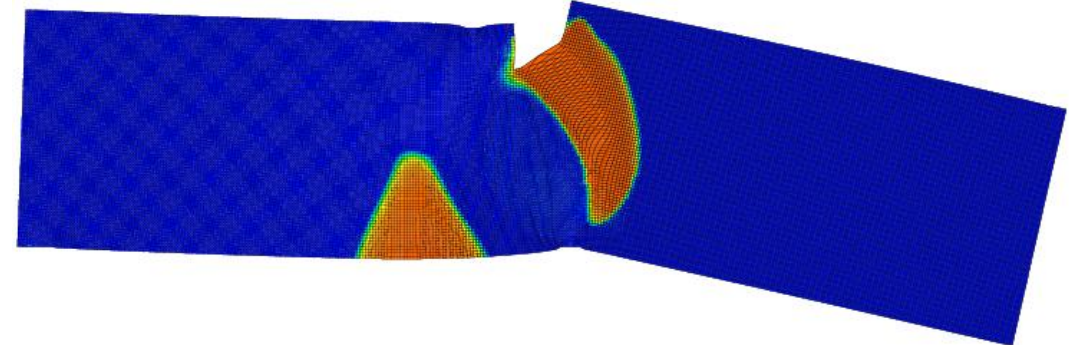
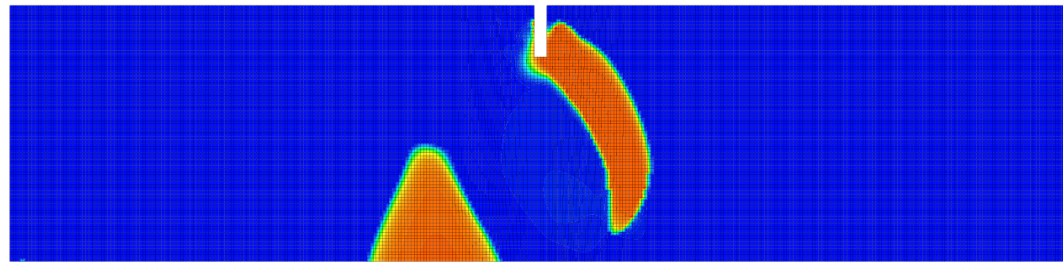


Figure 03 Damage distribution for undeformed and deformed shape (amplified 100 times)

Young's Modulus E (GPa)	Poisson's ratio $\nu$	Brittleness in tension $A_{Dir}$	Brittleness in compression $A_{Ind}$	Tensile strength $F_t$
28	0.2	$1.0 \times 10^{-2}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$3.6 \times 10+6$

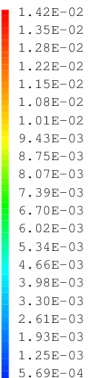
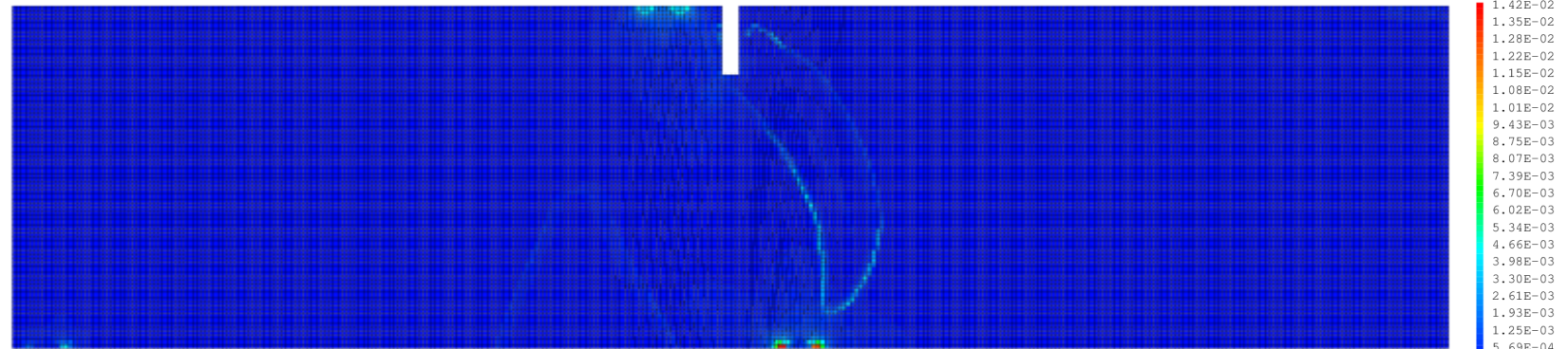
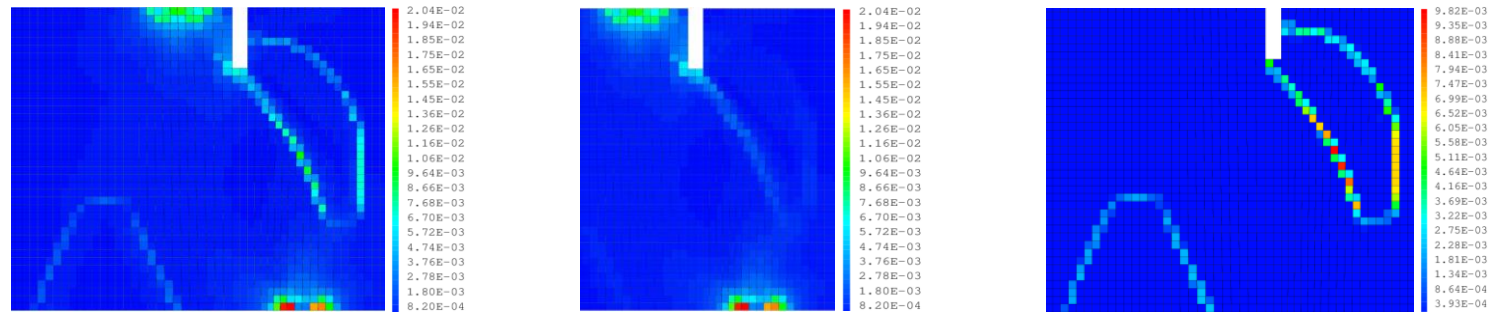
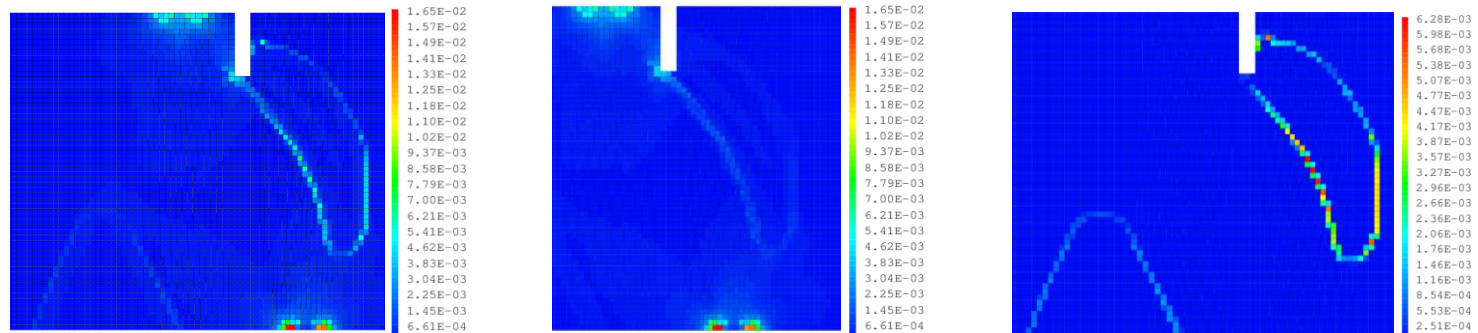


Figure 04 Contribution to relative global error  $\varepsilon = 4.89\%$  for mesh with 26816 elements and 27249 nodes ( $h=2.5\text{mm}$ )

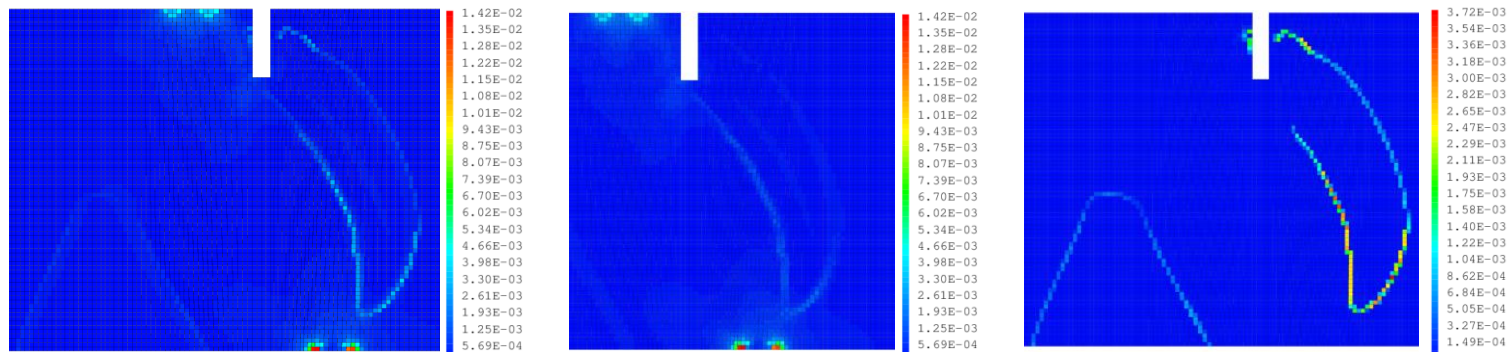
# IV.1 Analyse de la convergence de l'erreur



7-a) mesh of 6704 elements with size  $h = 5$  mm providing  $\varepsilon = 7.75\%$   $\varepsilon_\sigma = 6.61\%$  and  $\varepsilon_d = 4.04\%$



7-b) mesh of 15084 elements with size  $h = 3.33$  mm providing  $\varepsilon = 6.06\%$   $\varepsilon_\sigma = 5.19\%$  and  $\varepsilon_d = 3.13\%$



7-c) mesh of 26816 elements with size  $h = 2.5$  mm providing  $\varepsilon = 4.89\%$   $\varepsilon_\sigma = 4.37\%$  and  $\varepsilon_d = 2.20\%$

**Figure 5:** From left to right respectively: elements contributions to global error  $\varepsilon$ , to stress error  $\varepsilon_\sigma$  and to damage error  $\varepsilon_d$  cards in the vicinity of the notch.

# IV.1 Analyse de la convergence de l'erreur

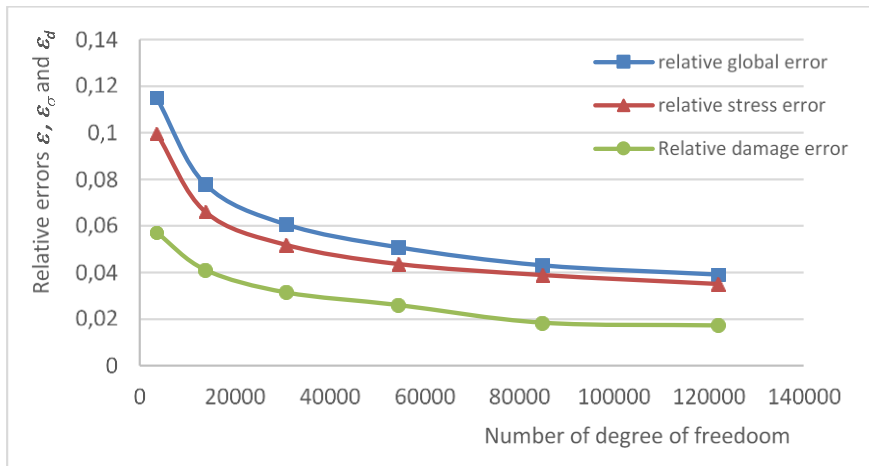


Figure 06: Evolution of  $\epsilon$ ,  $\epsilon_\sigma$  and  $\epsilon_d$  in function of the total number of degree of freedom

On peut constater une forte variabilité des erreurs portées par les contraintes et la variable d'endommagement entre pas de chargement successifs

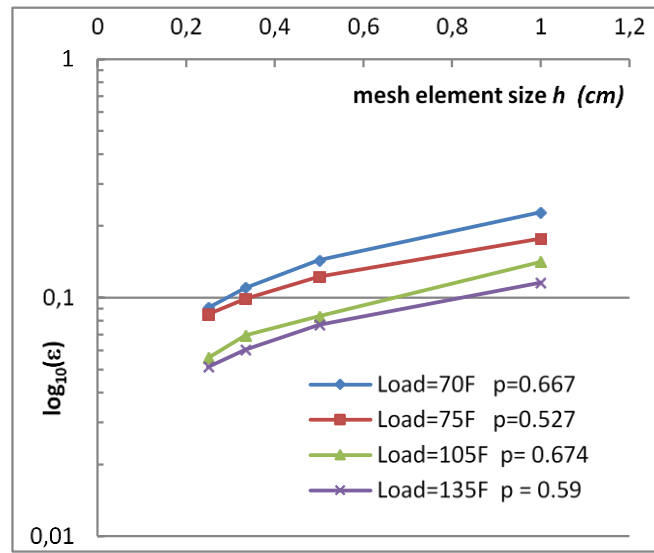


Figure 7: global error evolutions with the uniform refinement mesh for four different loading values

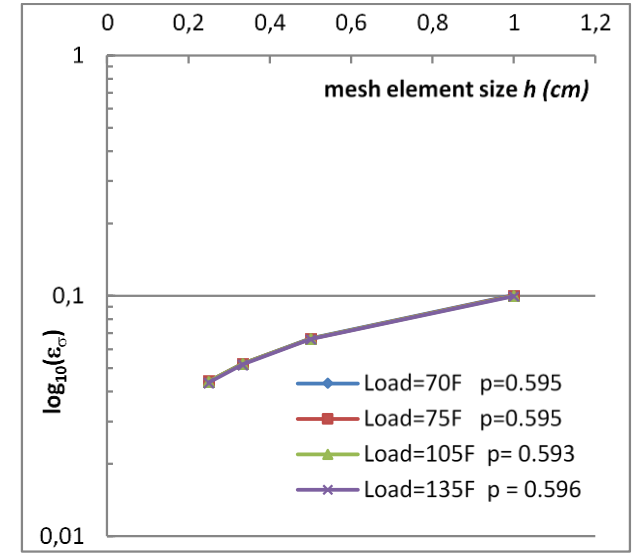


Figure 8: stress error evolutions with the uniform refinement mesh for different loading values

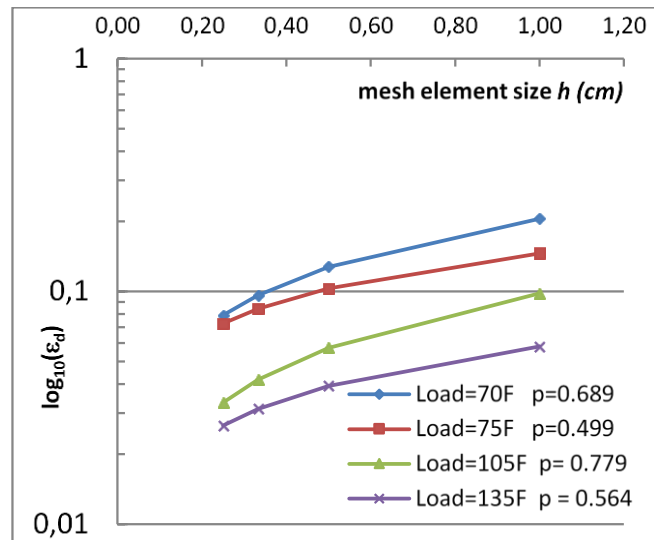


Figure 9: damage error evolutions with the uniform refinement mesh for different loading values

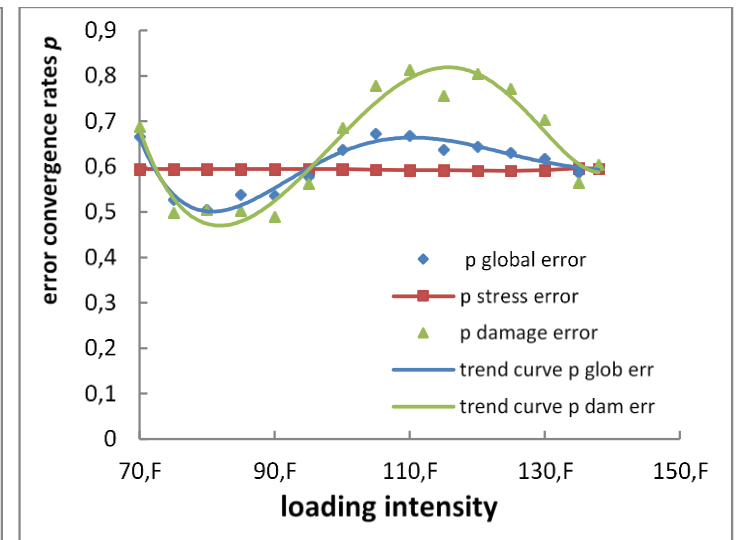


Figure 10: SENB test error convergence rates  $p$  for three errors  $\epsilon$ ,  $\epsilon_\sigma$  and  $\epsilon_d$  in function of the loading intensity

## IV.2 Indice d'efficacité de l'indicateur mis au point

## IV.2 Indice d'efficacité de l'indicateur mis au point

L'indice d'effectivité noté ici par  $\gamma$  semble être l'outil le plus utilisé. Il est généralement défini comme suit:

$$\gamma = \frac{e_s}{e}$$

avec  $e_s$  l'erreur approchée fournie par le présent indicateur et  $e$  l'erreur exacte calculée par rapport à la solution exacte. Cependant, comme cette dernière n'est pas disponible,  $e$  est obtenu en utilisant une solution de référence correspondant à un maillage très raffiné.

Toutefois, en raison d'un coefficient multiplicateur inconnu introduit dans la définition de l'erreur absolue  $e_s$ , *on ne peut calculer que l'erreur relative telle que définie plus haut (voir Becheur et al (2018))*. Pour surmonter cette difficulté, la solution proposée consiste à définir simultanément et séparément deux indices d'effectivité différents. Le premier indice est noté  $\gamma_\sigma$ . Il correspond à l'erreur portée par les champs de contraintes en norme énergétique et il peut être définie par:

$$\gamma_\sigma = \frac{\|\tilde{\sigma}_h - \sigma_h\|_{\sigma,\Omega}}{\|\tilde{\sigma}_{href} - \sigma_{href}\|_{\sigma,\Omega}}$$

Pour sa part, le second indice noté  $\gamma_d$  correspond à l'indice d'effectivité de l'erreur due à la solution du champ d'endommagement par rapport à celle de référence. Il peut également être défini par:

$$\gamma_d = \frac{\left(\int_{\Omega} (\tilde{d}_h - d_h)^2 d\Omega\right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega} (\tilde{d}_{href} - d_{href})^2 d\Omega\right)^{1/2}}$$

## IV.2 Indice d'efficacité de l'indicateur mis au point (suite)

Loading levels (F=0.7KN)	$\gamma_{\sigma}$	$\gamma_d$
40.F	1.26	0.98
50.F	1.26	0.80
60.F	1.26	0.89
70.F	1.26	0.92
80.F	1.26	1.02
100.F	1.26	1.16
105.F	1.26	1.01
110.F	1.26	0.97
120.F	1.26	0.99
130.F	1.26	1.24
135.F	1.26	1.83

**Table 02 :** Effectivity indexes for different loading levels

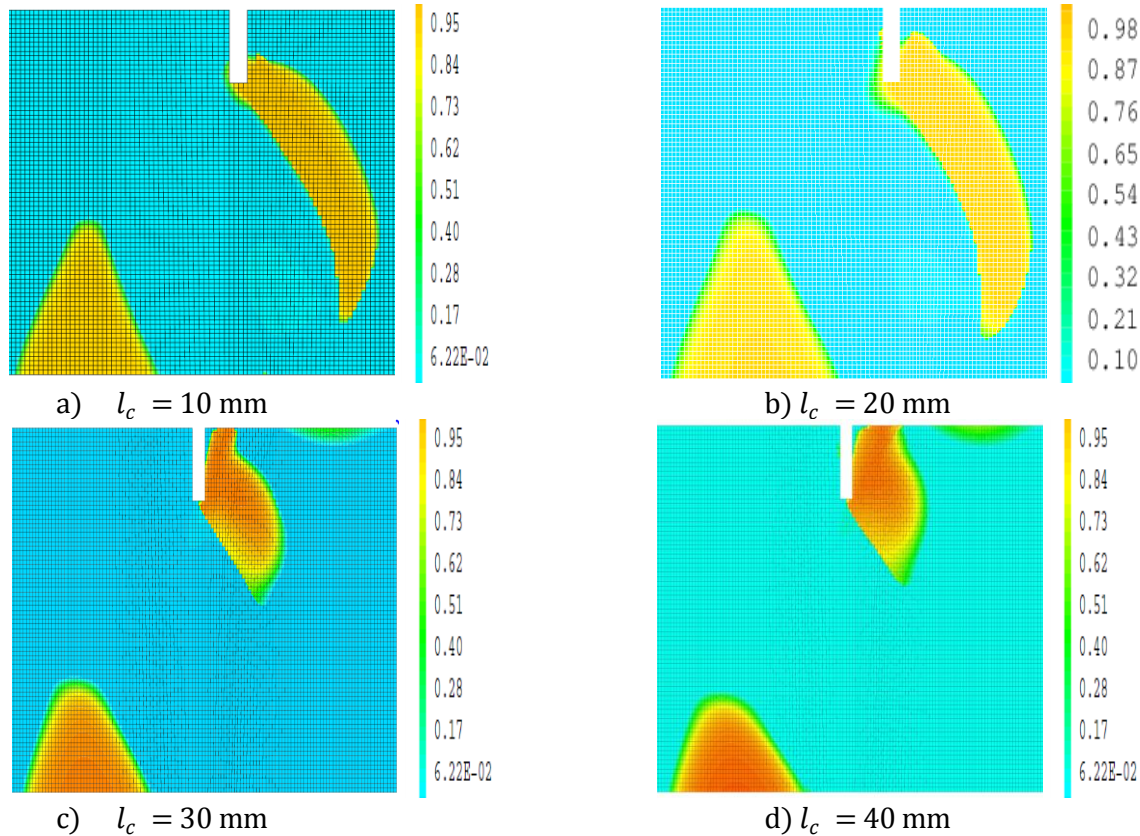
L'efficacité du présent indicateur d'erreur serait suffisamment acceptée si ces deux indices d'efficacité sont simultanément proches de l'unité ou du moins appartenant à des intervalles dont les bornes inférieures et supérieures sont proches (respectivement par défaut et par excès ) de l'unité (on estime généralement cet intervalle entre 0,8 et 1,2).

Ainsi on peut constater que cet indicateur surestime l'erreur portée par les champs de contraintes tandis que l'erreur portée par les champs d'endommagement serait globalement acceptable et oscillante autour de l'unité pour de faibles chargement et qu'elle s'éloigne considérablement de l'unité (efficacité limitée) pour des chargements élevés ( $\gamma_d=1,83$  pour 135F)

## IV.3 Influence de la longueur caractéristique



### IV.3 Influence de la longueur caractéristique



**Figure 12 :** Damage distribution of SENB test submitted to the same intensity of loading (138.F) and simulated with different values of  $l_c$  ( $=10, 20, 30$  and  $40$  mm)

$l_c$ (mm)	Relative global error (%)	Relative stress error (%)	Relative damage error (%)
10	5.07	4.42	2.47
20	4.89	4.37	2.20
30	4.83	4.44	1.91
40	5.45	4.44	3.17

**Table 02 :** relative error values of SENB tests submitted to the same loading level of 138F and for different values of  $l_c$

$l_c$ (mm)	Loading intensity values ( $F=0.7$ KN)
10	27.5F
20	36.8.F
30	48.3F
40	62.5F

**Table 03 :** loading intensity values corresponding to the first appearance of damage for different values of  $l_c$ .

En comparant les valeurs du tableau 03 et les illustrations a) à d) de la figure 15, on peut conclure que pour ce modèle d'endommagement du Ricrag, lorsque  $l_c$  augmente, l'apparition et le développement des zones d'endommagement semblent être retardés. Par ailleurs, l'erreur sur les champs de contraintes semble quasi constante tandis l'erreur d'endommagement varie de manière irrégulière lorsque  $l_c$  augmente.

### IV.3 Influence de la longueur caractéristique

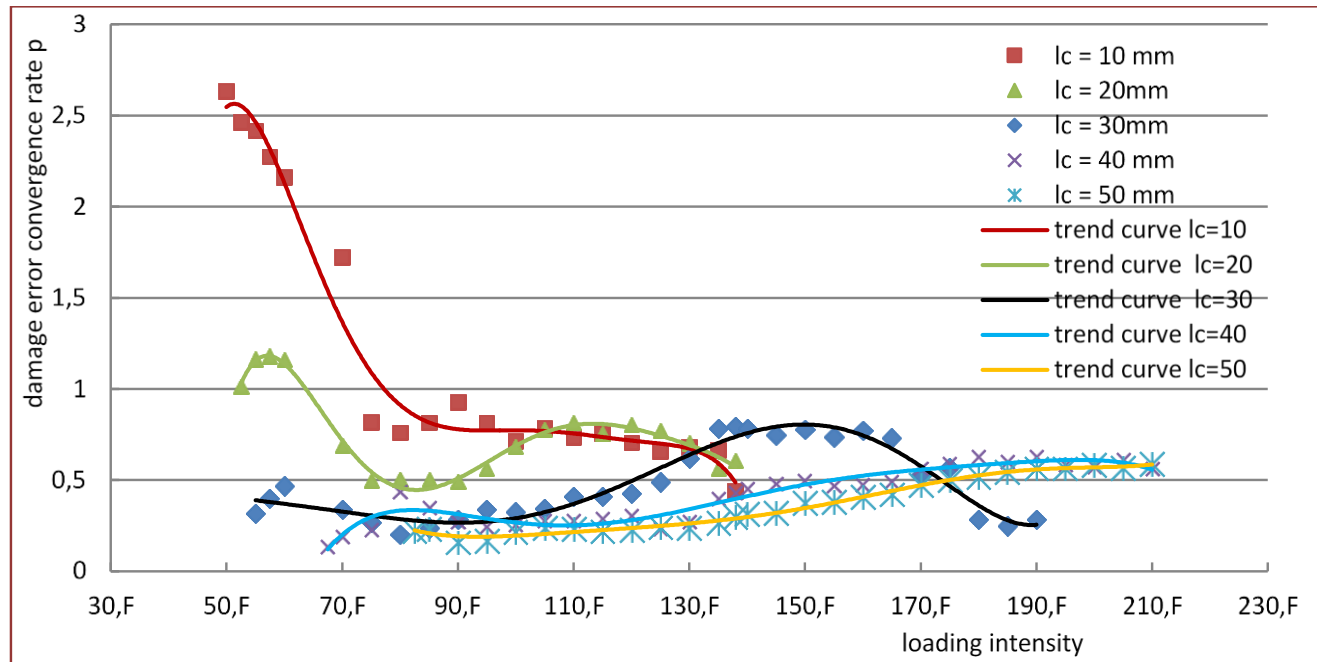


Figure 13 : damage error convergence rate  $p$  in function of the loading intensities for different values of the characteristic length  $l_c$

Pour le deuxième aspect considérant l'influence de  $l_c$  sur le taux  $p$  de convergence de l'erreur, on peut observer que la forte variation de  $p$  est confirmée pour les trois premières valeurs de  $l_c$  (10, 20 et 30 mm). Cependant, pour les deux autres (40 et 50 mm), bien que cette variation devienne moins forte, des valeurs faibles de  $p$  sont obtenues. Ces faibles valeurs constituent également une autre difficulté majeure pour la phase d'adaptation du maillage. En effet, il est bien connu qu'en dessous d'une certaine valeur de  $p$  environ égale à 0,6, la procédure d'adaptation de maillage nécessite un mailleur puissant à hautes performances.

# V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests

## V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests

Objectif : garantir à la fois un certain niveau de précision à l'utilisateur tout en minimiser les coûts en temps CPU de calcul.

Dans ce cadre, la procédure h-génération sera utilisée: la taille et les topologies des éléments sont modifiées tandis que le degré et le type de forme de l'élément reste le même.

Un maillage  $T^*$  est dit optimal (Ladeveze et al.1986) pour une erreur globale relative  $\varepsilon$  si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \text{avec } \varepsilon_0 \text{ la précision (ou l'erreur) prescrite par l'utilisateur} \\ N^* \text{ est minimal ( } N^* \text{ est le nombre total du maillage optimal } T^* \text{)} \end{array} \right.$$

Afin de résoudre le problème précédent d'optimisation, la procédure itérative suivante est adoptée :

- Calcul sur un maillage grossier  $T$
- Calcul des erreurs relatives globales  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_\sigma$ ,  $\varepsilon_d$  et établissement des cartes d'erreur globale, de contrainte et d'endommagement
- Détermination du maillage optimal  $T^*$  fourni par les calculs d'une carte de taille prescrite obtenue en utilisant la méthode développée par Coorevits et al. (1995)
- un deuxième calcul des erreurs relatives sur le nouveau maillage  $T^*$  est effectué.

Si l'erreur globale relative  $\varepsilon$  obtenue est supérieure à  $\varepsilon_0$ , cette procédure est répétée jusqu'à obtention d'une précision proche de  $\varepsilon_0$ .

## V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests

### Exemple d'adaptation de maillage pour le cas d'une poutre simplement entaillée (SENB test) :

Erreur prescrite ou précision désirée = 05 %

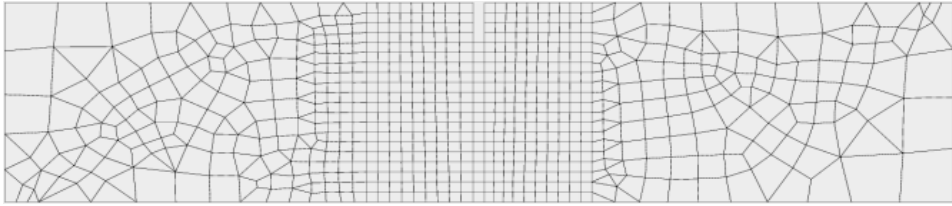


Figure 14 : Maillage initial grossier composé de 765 éléments et 789 nœuds

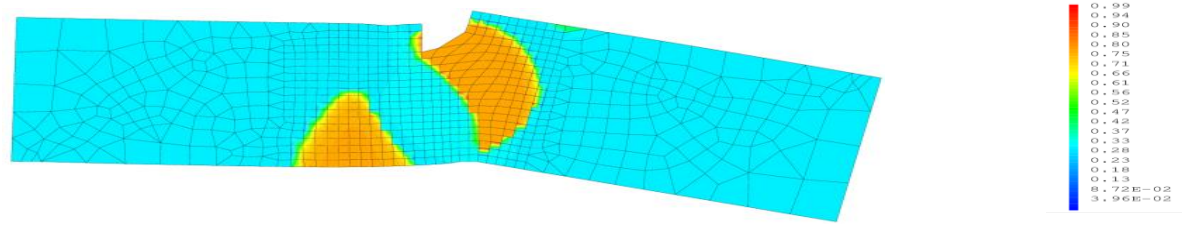


Figure 15 : Configuration déformée et carte d'endommagement (figure amplifiée 63 fois)

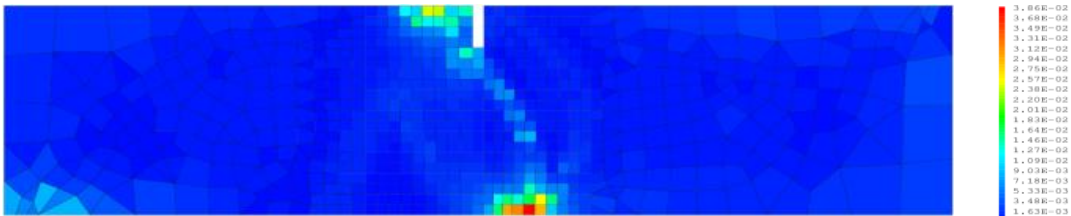


Figure 16: Carte de contribution à l'erreur de maillage du maillage grossier initial avec  $\varepsilon_0 = 11.37\%$

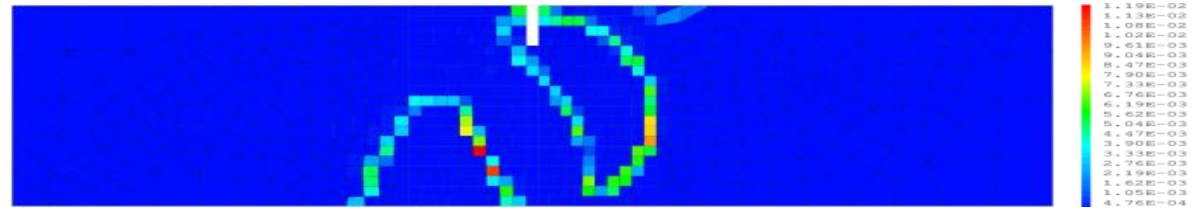


Figure 17: Carte de contribution à l'erreur d'endommagement du maillage grossier initial avec  $\varepsilon_0 = 4.43\%$

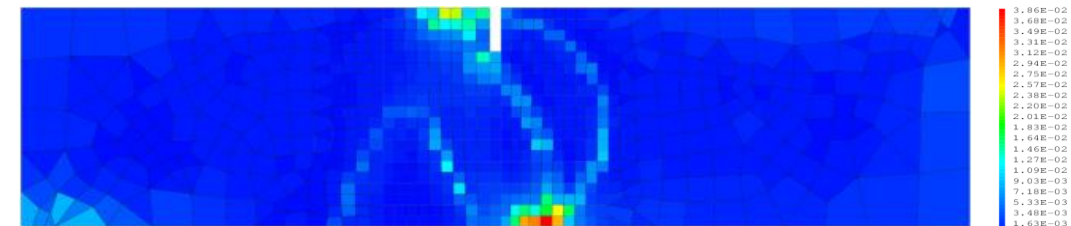


Figure 18 : Carte de contribution à l'erreur globale du maillage grossier initial avec  $\varepsilon = 12.20\%$

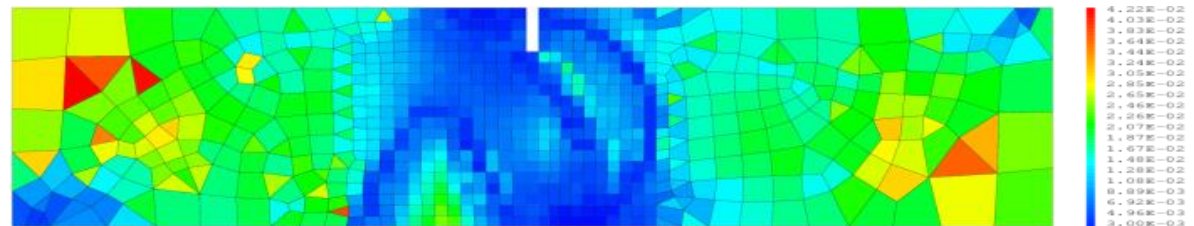
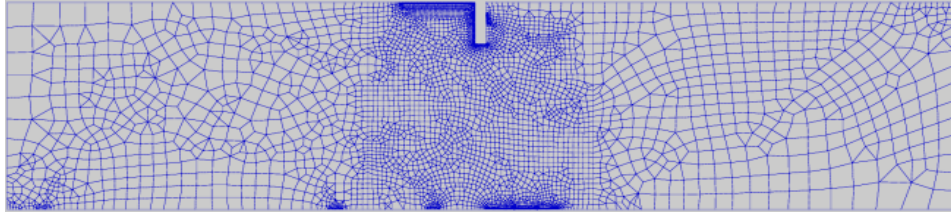


Figure 19: Carte des tailles des éléments prescrite pour obtenir une erreur relative globale  $\varepsilon_0 = 5\%$ .

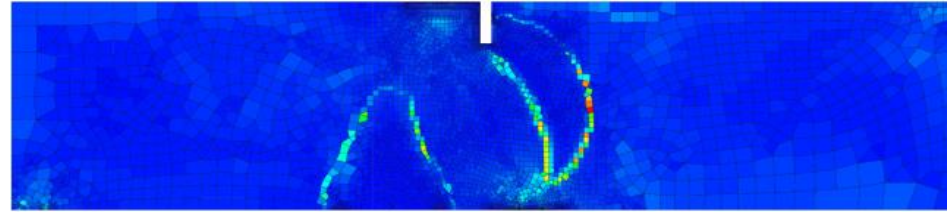
## V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests

### Suite de l'exemple d'adaptation de maillage pour le cas d'une poutre simplement entaillée (SENB test) :

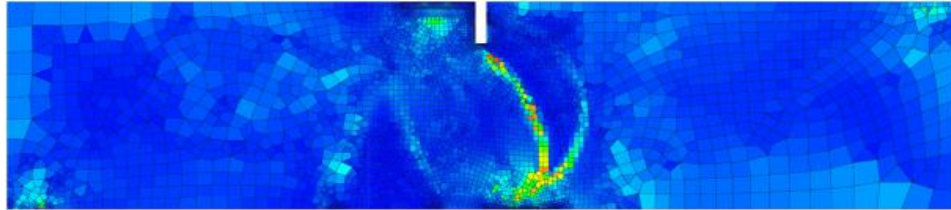
Erreur prescrite ou précision désirée = 05 %



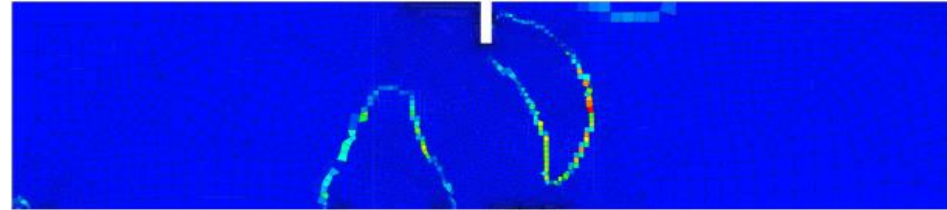
**Figure 20:** Maillage optimal obtenu et composé de 5958 éléments de type QUA4 avec une précision finale de  $\varepsilon = 4.86\%$



**Figure 21:** Carte de contribution à l'erreur globale du maillage optimal avec  $\varepsilon = 4.86\%$ ,



**Figure 22 :** Carte de contribution à l'erreur de maillage du maillage optimal avec  $\varepsilon_g = 3.39\%$



**Figure 23:** Carte de contribution à l'erreur d'endommagement du maillage optimal avec  $\varepsilon_d = 3.48\%$

Pour les champs de distribution des erreurs, les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus par l'utilisation de la méthode des résidus mise au point par Huerta et al (2000). Toutefois, pour l'erreur relative globale, les valeurs obtenues sont significativement plus grandes que celles fournies par la méthode des résidus.

## V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests

### Second exemple d'adaptation de maillage pour le cas d'une poutre doublement entaillée (DENB test) :

Erreur prescrite ou précision désirée = 05 %

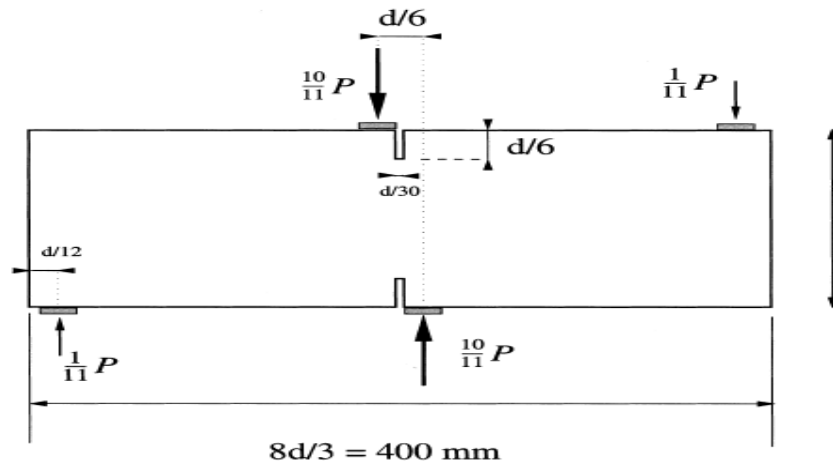


Figure 24: DENB test (Geers et al. 2000)

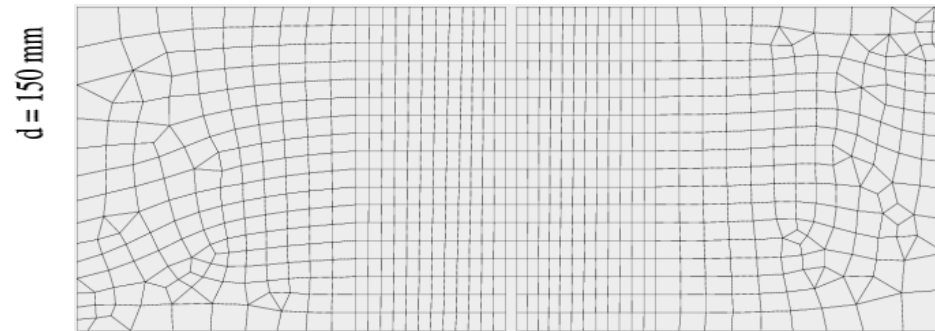


Figure 25: Initial mesh with 842 QUA4 elements and 892 nodes.

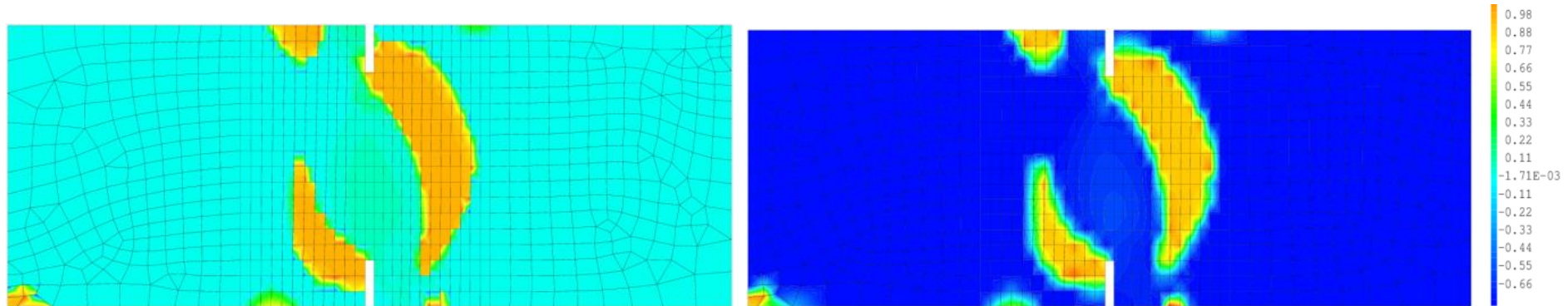


Figure 26: Non smoothed (on the left) and smoothed (on the right) damage field distributions

## V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests

### Second exemple d'adaptation de maillage pour le cas d'une poutre doublement entaillée (DENB test) :

Erreur prescrite ou précision désirée = 05 %

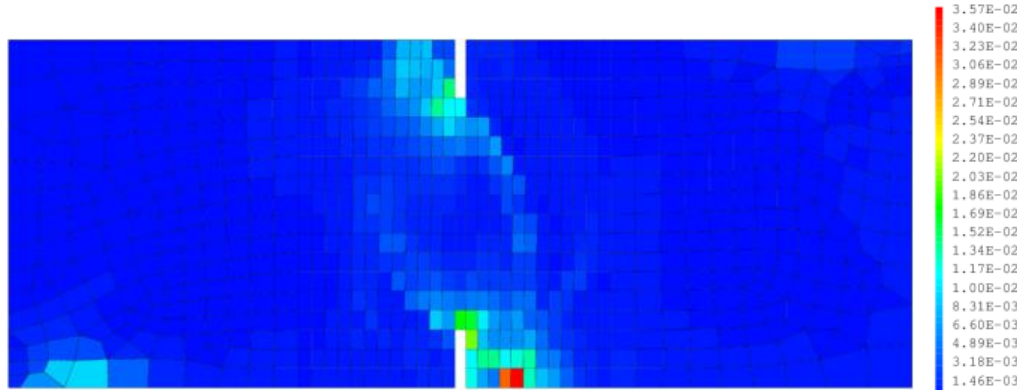


Figure 27: Initial mesh stress error card with  $\varepsilon_{\sigma} = 9.50\%$

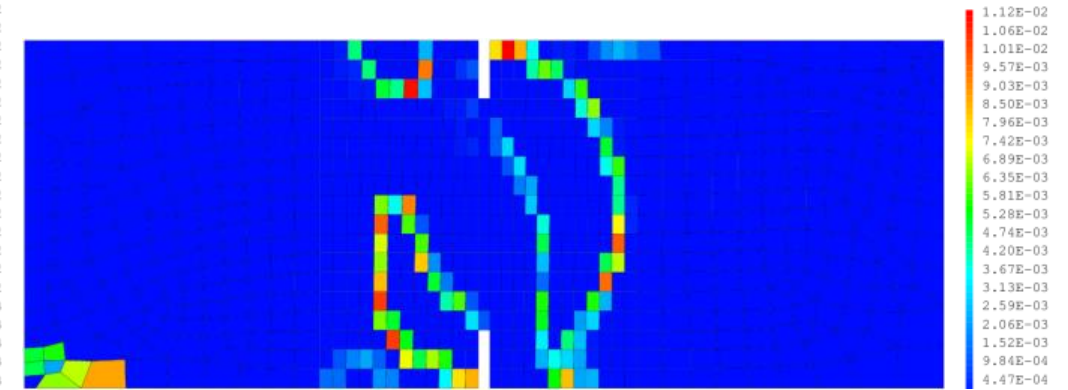


Figure 28: Initial mesh damage error card with  $\varepsilon_d = 5.65\%$

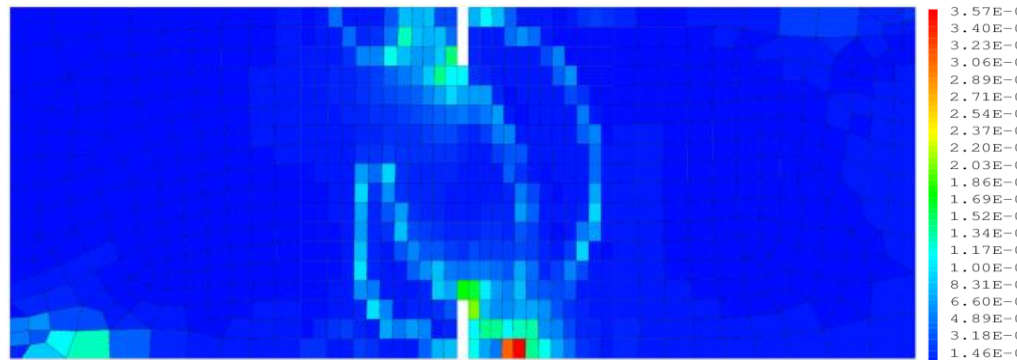


Figure 29: Initial mesh global error card with a relative global error  $\varepsilon = 11.05\%$

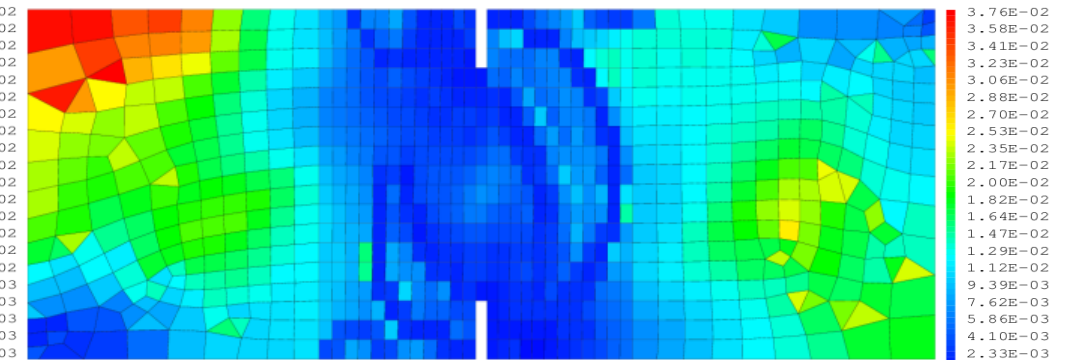


Figure 30: Prescribed element size card for a prescribed error of  $\varepsilon_0 = 5\%$



## V. Contrôle de l'erreur ou adaptation de maillages sur des cas tests

### Second exemple d'adaptation de maillage pour le cas d'une poutre doublement entaillée (DENB test) :

Erreur prescrite ou précision désirée = 05 %

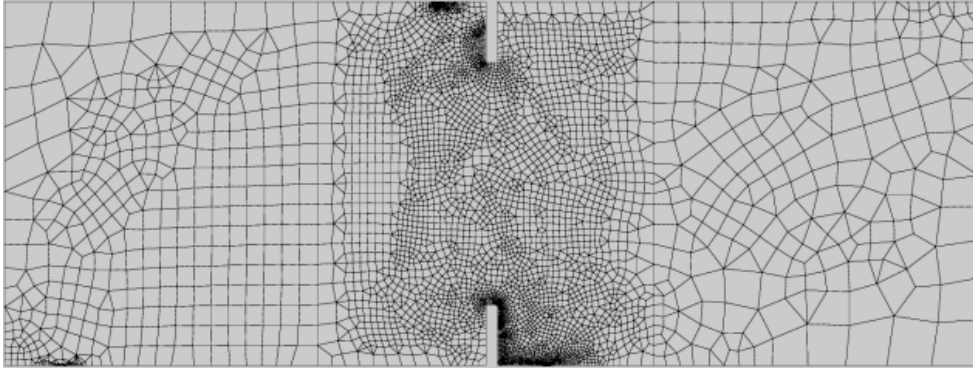


Figure 31: optimized mesh of 6110 qua4 elements with a final accuracy of  $\varepsilon = 4.95\%$

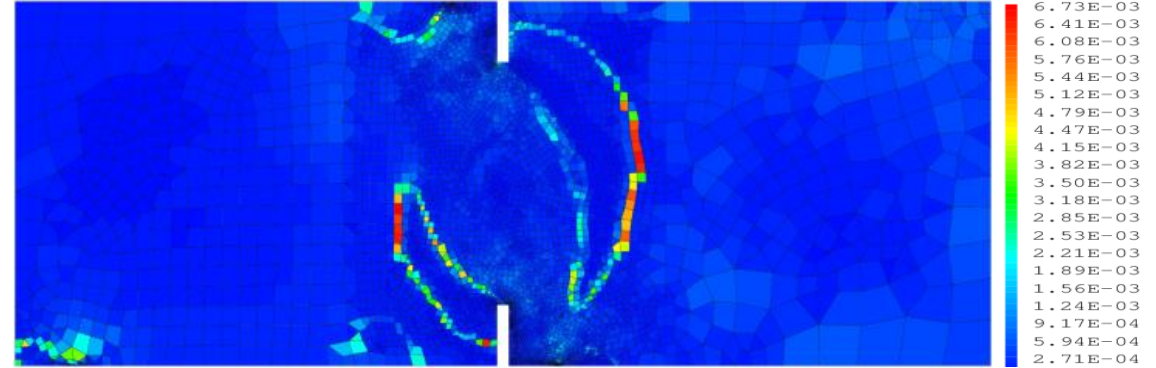


Figure 32 global error card of the optimized mesh (with  $\varepsilon = 4.95\%$ )

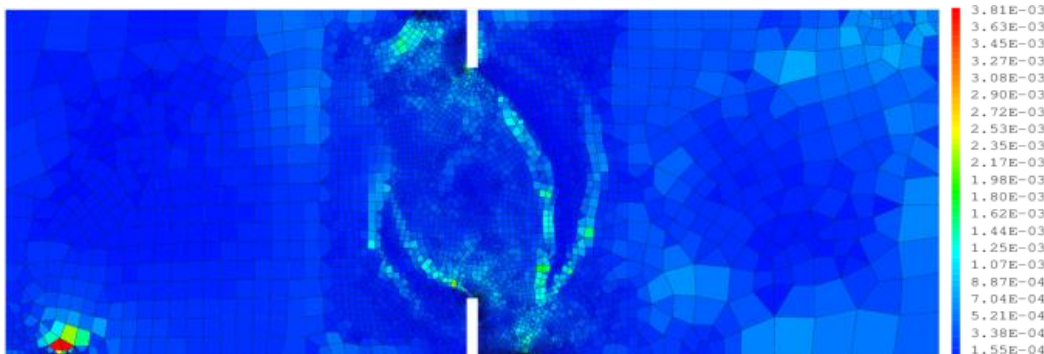


Figure 33: optimized mesh stress error card with  $\varepsilon_\sigma = 2.72\%$

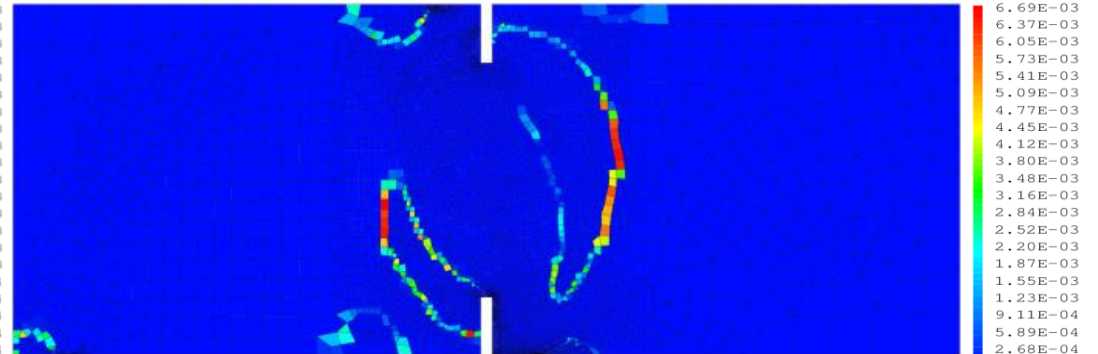


Figure 34: optimized mesh damage error card with  $\varepsilon_d = 4.14\%$

# VI. Discussion et conclusion

## VI. Discussion et conclusion

L'erreur globale est composée de deux termes (erreurs d'endommagement et de maillage) qui ont les mêmes ordres de grandeur.

**Conséquence :** cela explique également l'exigence de précision de 5% au lieu de 2% habituellement prescrites pour les tests d'adaptation de maillage.

**Un autre résultat :** les analyses de convergence effectuées ont mis en évidence une forte variabilité du taux de convergence des erreurs d'endommagement avec les incréments de chargement. Cette difficulté est encore plus accentuée dans le cas d'éléments de tailles non uniformes. Ceci constitue une difficulté majeure pour obtenir une adaptation de maillage automatique pas à pas. Néanmoins, pour un pas choisi et en se limitant à déterminer manuellement le taux de convergence des erreurs d'endommagement, des calculs optimisés peuvent être effectués.

# Quelques références

# Quelques références

- Becheur, A., Medjahed, A., Coorevits, P. A new a posteriori error indicator and its mesh optimization for nonlocal concrete damage models. Latin American Journal of Solids and Structures LAJSS, vol 15 (9) (2018). <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78254793>
- Babuska, I., Rheinboldt, W.C., (1978). Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM J. Numer. Anal. vol. 15, n°4: 736-754.
- Bazant Z.-P., (1986). "Mechanics of distributed cracking" Appl Mech Rev, ASME, 39: 675-705.
- Carpinteri, A., Valente, S., Ferrara, G., Melchiorri, G., (1993). Is mode II fracture energy a real material property. Computers and Structures 48: 397-413.
- CAST3M: [www-cast3m.cea.fr](http://www-cast3m.cea.fr)
- Comi, C., Perego, U., (2001) Numerical aspects of nonlocal damage analyses. Revue européenne des éléments finis, 10:227–242.
- Comi, C., Perego, U., (2002) Finite element strategies for damage assessment up to failure. In Proceedings of the 6th National Congress SIMAI, Chia Laguna, Italy.
- Coorevits, P., Ladeveze, P., Pelle, J.P., (1994). Mesh optimization for problems with steep gradient areas. Engineering computations. 11: 129-144.
- Coorevits, P., Ladeveze, P., Pelle, J.P., (1995). An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 121: 91-120.
- Delmas, J. (2011) [https://www.code-aster.org/V2/doc/v10/fr/man\\_r/r3/r3.06.03.pdf](https://www.code-aster.org/V2/doc/v10/fr/man_r/r3/r3.06.03.pdf)
- De Vree, J.H.P., Brekelmans, W.A.M., Gils, M.A.J., (1995). Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. Computers and Structures 55: 581-588.
- Geers MGD, De Borst R, Peerlings RHJ. (2000) Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams. Engineering Fracture Mechanics; 65:247–261.
- Hinton, E., Campbell, J.S. (1974). Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method. Int. J. Numer. Meth. Engrg. 8: 461-480.
- Hinton E., Scott F.C., Ricketts R.E. (1975) - Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements - Int. J. for Num. Meth. in Eng. 9: 235 – 256.
- Gerasimov, T; Stein E. and Wriggers P. (2015) Constant-free explicit error estimator with sharp upper error bound property for adaptive FE analysis in elasticity and fracture Int. J. Numer. Meth. Engrg; 101:79–126.
- Giry C., Dufour F., Mazars J. (2011) Stress based nonlocal damage model, International Journal of Solids and Structures, , 48: 3431-3443.
- Huerta, A., Rodríguez-Ferran A., Díez P. (2002) Error estimation and adaptivity for nonlinear FE analysis. Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.12:59–70.

# Quelques références

- Jirasek, M. and Grassl, P. (2008) Evaluation of directional mesh bias in concrete fracture simulations using continuum damage models. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:1921-1943.
- Kachanov, L. M. (1958). On the time to failure under creep conditions. *Izv. AN SSSR, Otd. Tekhn. Nauk* 8: 26-31.
- Ladeveze, P., (1975). Comparaison de modèles de milieux continus, Ph.D. thesis, Paris VI, university.
- Ladeveze, P., Leguillon, D. (1983). Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM J. Num. Anal.* Vol. 20 N° 3: 483-509.
- Ladeveze, P., Coffignal, G., Pelle, J.P., (1986). Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis, in Accuracy estimates and adaptative refinements in Finite Element computations. Chapter 11, 181-203, Babuska, Gago, Oliveira, Zienkiewicz Editors, J. Wiley.
- Mazars, J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure, Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VI.
- Mazars J., Hamond F., Grange S., (2014) A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings, *Materials and Structures*.
- Rabotnov, YN. (1969) Creep problem in structural members. North Holland, Amsterdam.
- Needleman, A. (1988) Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* Vol. 67 p.69-85.
- Pijaudier-Cabot G, Bazant Z -P. (1987) "Nonlocal damage theory" *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, vol 113, n°10:1512-1533.
- Ramtani, S. (1990). Contribution à la modélisation du comportement multi-axial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral. Ph.D. thesis, Paris VI, university.
- Rodríguez -Ferran, A., Huerta, A. (2000) Error estimation and adaptivity for nonlocal damage models. *Int. J. Solids Struct.* 37:7501-7528.
- Rodríguez-Ferran A., Arbós I. and Huerta A. (2001): Adaptive analysis based on error estimation for nonlocal damage models.—*Revue européenne des éléments finis (Special issue: Numerical Modelling in Damage Mechanics)*, Vol. 10, No. 2–4: 193–207.
- Richard, B, Ragueneau, F., Cremona, C., Adelaide L. (2010) Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading: Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, 77 (8):1203-1223.
- Schlangen, (1993). Experimental and numerical analysis of fracture processes concrete. Ph.D. thesis, Delft University of Technology.
- Terrien, M. (1980). Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. *BLPC*, vol 105, p 65–72.
- Verfürth R. (2013) A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods. Oxford University Press: Oxford.
- Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z., (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. for Num. Meth. in Engng.* 24, 337-357.
- Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z., (1992). The Superconvergent Patch Recovery and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101, Iss 1-3: 207-224.
- Zienkiewicz, O.C. (2006). The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195: 207-213.

Merci pour votre attention