Approche numérique du comportement viscoélastique dans un environnement variable

RANDRIAMBOLOLONA Hery - DUBOIS Frédéric - PETIT Christophe

Laboratoire de Mécanique et Modélisation des Matériaux et Structures du Génie Civil
IUT d'Egletons - Université de LIMOGES

Liste des exposés

Comportement viscoélastique dépendant de l'environnement

- Comportement viscoélastique non vieillissant

→ **Les caractéristiques mécaniques du matériau sont constantes**

→ **Formulation de Boltzmann**

$$\varepsilon(\tau) = \int_{0+}^{t} J(t,\tau)\,\frac{\partial\sigma(\tau)}{\partial\tau}\,d\tau + \sum_{q=1}^{N} J(t,t_q)\Delta\sigma^{(q)}$$

- Dépendance des caractéristiques mécaniques avec l'environnement

→ **Température, Humidité**

- Prise en compte du vieillissement du matériau

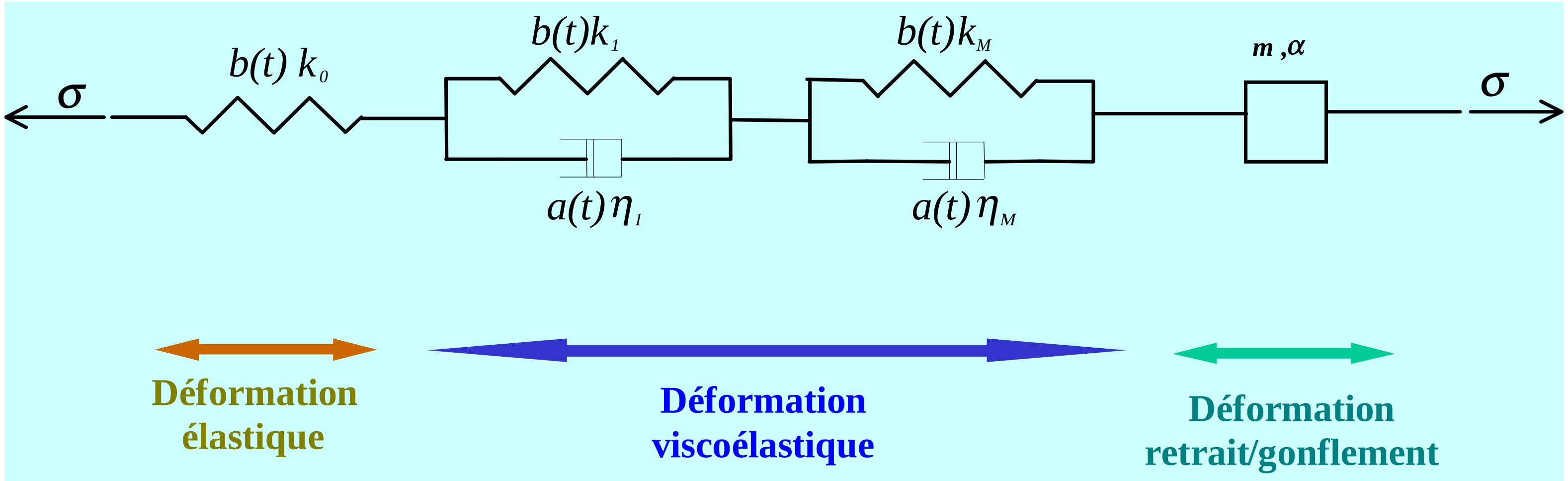
→ **Gain de rigidité**

→ **Perte de rigidité**

Liste des exposés

Approche rhéologique

Modèle rhéologique :
(Kelvin Voigt généralisé + ressort + retrait/gonflement en série)



Partition des déformations

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + \sum_{m=1}^{M} \varepsilon^{(m)}(t) + \varepsilon_\alpha(t)$$

Evolution des caractéristiques des ressorts et des amortisseurs en fonction des caractéristiques de l'environnement

$b(w(t), T(t))$: translation horizontale

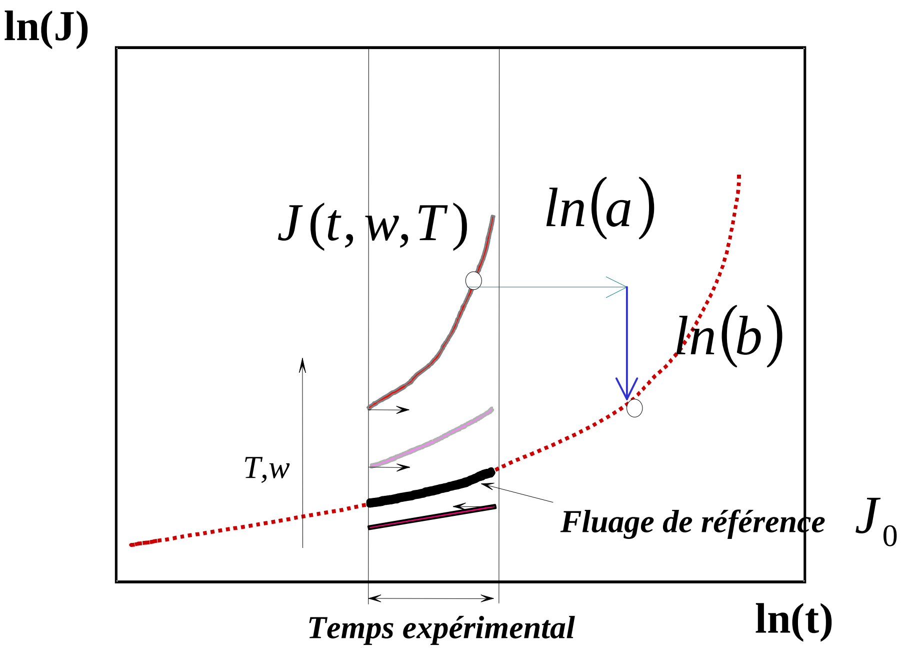
$a(w(t), T(t))$: translation verticale

- Les translations a(t) et b(t) génèrent le temps réduit :

$$\Phi = \int_0^t \frac{b(\tau)}{a(\tau)} d\tau$$

- Equivallence temps-température-humidité

Courbe de maitresse de fluage



$$J(t,w,T) = b.J_0\left(\frac{t}{a}\right)$$

- Formulation de Boltzmann

$$\Phi - \Phi' = \int_\tau^t \frac{b(\alpha)}{a(\alpha)} d\alpha$$

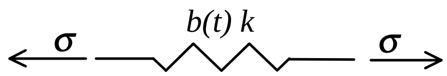
$$\varepsilon(\Phi) = \int_{0+}^{\Phi} J(\Phi,\Phi') \frac{\partial\sigma(\Phi')}{\partial\Phi'} d\Phi' + \sum_{q=1}^{N} J(\Phi,\Phi_q)\Delta\sigma^{(q)}$$

Liste des exposés

Approche thermodynamique

- Comportement des éléments rhéologiques

  Respect du 1er principe de la thérmodynamique (Bazant)

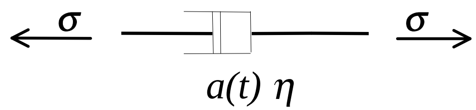


ressort

$\dot{b}(t) < 0$	assouplissement du ressort	rigidification du ressort	$\dot{b}(t) > 0$

$$\boxed{\sigma_k(t) = b(t)\,k\,\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{\dot{\sigma}_k(t) = b(t)\,k\,\dot{\varepsilon}(t)}$$



amortisseur

$$\boxed{\sigma_\eta(t) = a(t)\,\eta\,\dot{\varepsilon}(t)}$$

Liste des exposés

Equation différentielle

Pour 1 élément de Kelvin Voigt

- Assouplissement du ressort dans le temps

$$\frac{d\varepsilon^{(m)}(t)}{dt} + \frac{\lambda^{(m)}}{a(t)}\varepsilon^{(m)}(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta^{(m)}a(t)}$$

- Rigidification du ressort dans le temps

$$\frac{d^2\varepsilon^{(m)}(t)}{dt^2} + \left(\frac{b(t)}{a(t)}\lambda^{(m)} + \frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt}\right)\frac{d\varepsilon^{(m)}(t)}{dt} = \frac{1}{\eta^{(m)}a(t)}\frac{d\sigma(t)}{dt}$$

Pour 1 élément de retrait gonflement

$$\frac{d\varepsilon_\alpha(t)}{dt} = [\alpha + m \cdot \sigma(t)] \cdot \frac{dw(t)}{dt}$$

RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DANS L'ESPACE TEMPS REDUIT

$\varepsilon(\Phi)$

Liste des exposés

Loi de comportement

Formulation 1D

- Viscoélasticité adoucissant

$$\boxed{\varepsilon(\Phi)=\int_{0+}^{\Phi} J(\Phi,\Phi')\,\frac{\partial Q(\Phi')}{\partial \Phi'}\,d\Phi'+\sum_{q=1}^{N} J(\Phi,\Phi_q)\Delta Q(\Phi_q)}$$

$$J(\Phi,\Phi')=\frac{1}{k^{(0)}}+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{k^{(m)}}\left(1-e^{-\lambda^{(m)}(\Phi-\Phi')}\right)$$

$$Q(\Phi)=\frac{\sigma(\Phi)}{b(\Phi)}$$

- Viscoélasticité rigidifiant

$$\boxed{\varepsilon(\Phi)=\int_{0+}^{\Phi} J(\Phi,\Phi')\,\frac{\partial \sigma(\Phi')}{\partial \Phi'}\,d\Phi'+\sum_{q=1}^{N} J(\Phi,\Phi_q)\Delta\sigma(\Phi_q)}$$

$$J(\Phi,\Phi')=\frac{1}{b(\Phi')k^{(0)}}+\sum_{m=1}^{M}\int_{\Phi'}^{\Phi}\frac{e^{-\lambda^{(m)}(\Phi''-\Phi')}}{\eta^{(m)}b(\Phi'')}\,d\Phi''$$

$$\Phi''-\Phi'=\int_{\tau}^{\beta}\frac{b(\alpha)}{a(\alpha)}\,d\alpha$$

Liste des exposés

Formulation 3D

- Viscoélasticité adoucissant

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}(\Phi)=\int_{0+}^{\Phi}\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}(\Phi,\Phi')\,\frac{\partial \underline{\underline{Q}}(\Phi')}{\partial \Phi'}\,d\Phi'+\sum_{q=1}^{N}\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}(\Phi,\Phi_q)\underline{\underline{\Delta Q}}(\Phi_q)}$$

$$J_{ijkl}(\Phi,\Phi')=\frac{1}{k_{ijkl}^{(0)}}+\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{k_{ijkl}^{(m)}}\left(1-e^{-\lambda_{ijkl}^{(m)}(\Phi-\Phi')}\right)$$

- Viscoélasticité rigidifiant

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}}(\Phi)=\int_{0+}^{\Phi}\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}(\Phi,\Phi')\,\frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}(\Phi')}{\partial \Phi'}\,d\Phi'+\sum_{q=1}^{N}\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}(\Phi,\Phi_q)\underline{\underline{\Delta \sigma}}(\Phi_q)}$$

$$J_{ijkl}(\Phi,\Phi')=\frac{1}{b(\Phi')k_{ijkl}^{(0)}}+\sum_{m=1}^{M}\int_{\Phi'}^{\Phi}\frac{e^{-\lambda^{(m)}(\Phi''-\Phi')}}{\eta_{ijkl}^{(m)}b(\Phi'')}\,d\Phi''$$

Formulation incrémentale

- **Discrétisation du comportement rhéologique par différence finie**

$$\Delta\varepsilon(\Phi_n) = \varepsilon(\Phi_n) - \varepsilon(\Phi_{n-1}) \Rightarrow \boxed{\Delta\varepsilon(\Phi_n) = \Delta\varepsilon_0(\Phi_n) + \sum_{m=1}^{M} \Delta\varepsilon^{(m)}(\Phi_n) + \Delta\varepsilon_\alpha(\Phi_n)}$$

- **Linéarité dans l'incrément de temps réduit** $\Phi \in [\Phi_n, \Phi_{n-1}]$

$$\sigma(\Phi) \quad w(\Phi) \quad a(\Phi) \quad c(\Phi) = \frac{1}{b(\Phi)}$$

$$\boxed{\Delta\varepsilon(\Phi_n) = M^{(n)}.\Delta\sigma(\Phi_n) + \tilde{\varepsilon}(\Phi_{n-1})}$$

chargement mécanique — Histoire mécanique

Liste des exposés

Viscoélasticité adoucissant

$$\Delta\varepsilon(\Phi_n) = M_{ad}{}^{(n)} . \Delta\sigma(\Phi_n) + \tilde{\varepsilon}_{ad}(\Phi_{n-1})$$

$$\begin{aligned} M_{ad}{}^{(n)} &= c(\Phi_{n-1})\left\{\frac{1}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{k^{(m)}}\left(1 - \frac{1}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1 - e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right)\right]\right\} \\ &+ \Delta c(\Phi_n)\left\{\frac{1}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{k^{(m)}}\left(1 - \frac{2}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1 - \frac{1}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1 - e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right)\right)\right]\right\} \\ &+ \Delta w(\Phi_n)\frac{m}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{ad}(\Phi_{n-1}) &= \sum_{m=1}^{M}\left[\left(e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n} - 1\right)\varepsilon^{(m)}(\Phi_{n-1})\right] \\ &+ \sigma(\Phi_{n-1})\left[\begin{aligned} & c(\Phi_{n-1})\left\{\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{k^{(m)}}\left(1 - e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right]\right\} \\ & + \Delta c(\Phi_n)\left\{\frac{1}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{k^{(m)}}\left(1 - \frac{1}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1 - e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right)\right]\right\} \\ & + \Delta w(\Phi_n) m \end{aligned}\right] \\ &+ \Delta w(\Phi_n)\alpha \end{aligned}$$

Liste des exposés

Viscoélasticité rigidifiant

$$\Delta\varepsilon(\Phi_n) = M_{rig}^{(n)} . \Delta\sigma(\Phi_n) + \tilde{\varepsilon}_{rig}(\Phi_{n-1})$$

$$\begin{aligned} M_{rig}^{(n)} = {} & c(\Phi_{n-1})\left\{\frac{1}{k^{(0)}} + \sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{k^{(m)}}\left(1-\frac{1}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1-e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right)\right]\right\} \\ & + \Delta c(\Phi_n)\left\{\frac{1}{2k^{(0)}} + \sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{2k^{(m)}}\left(1+\frac{2}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n} - \frac{1}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1-e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right)\right)\right]\right\} \\ & + \Delta w(\Phi_n)\frac{m}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rig}(\Phi_{n-1}) = {} & \sum_{m=1}^{M}\left[\bar{\varepsilon}^{(m)}(\Phi_{n-1})\left\{c(\Phi_{n-1})\left(e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}-1\right) + \Delta c(\Phi_n)\left(e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n} - \frac{1}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1-e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right)\right\}\right] \\ & + \sigma(\Phi_{n-1})\left\{\begin{array}{l} c(\Phi_{n-1})\left\{\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{k^{(m)}}\left(1-e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right]\right\} \\ -\Delta c(\Phi_n)\left\{\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{1}{k^{(m)}}\left(e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n} - \frac{1}{\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\left(1-e^{-\lambda^{(m)}\Delta\Phi_n}\right)\right)\right]\right\} \\ +\Delta w(\Phi_n)\, m \end{array}\right\} \\ & + \Delta w(\Phi_n)\, \alpha \end{aligned}$$

Liste des exposés

Résolution par la méthode des éléments finis

- Equation d'équilibre incrémentale

$$\boxed{\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}(\Phi_n) = \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}^{(n)} . \underline{\underline{\Delta\sigma}}(\Phi_n) + \underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}(\Phi_{n-1})}$$

$$\boxed{[K_T](\Phi_n)\{\Delta U\}(\Phi_n) = \{\Delta F_{ext}\}(\Phi_n) + \{\Delta F_{vis}\}(\Phi_{n-1})}$$

$$\underline{\underline{\Delta\sigma}}(\Phi_n) = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}_n . \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}(\Phi_n) + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}(\Phi_{n-1})$$

$$[K_T](\Phi_n) = \int_\Omega [B]^T \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}_n [B] dV$$

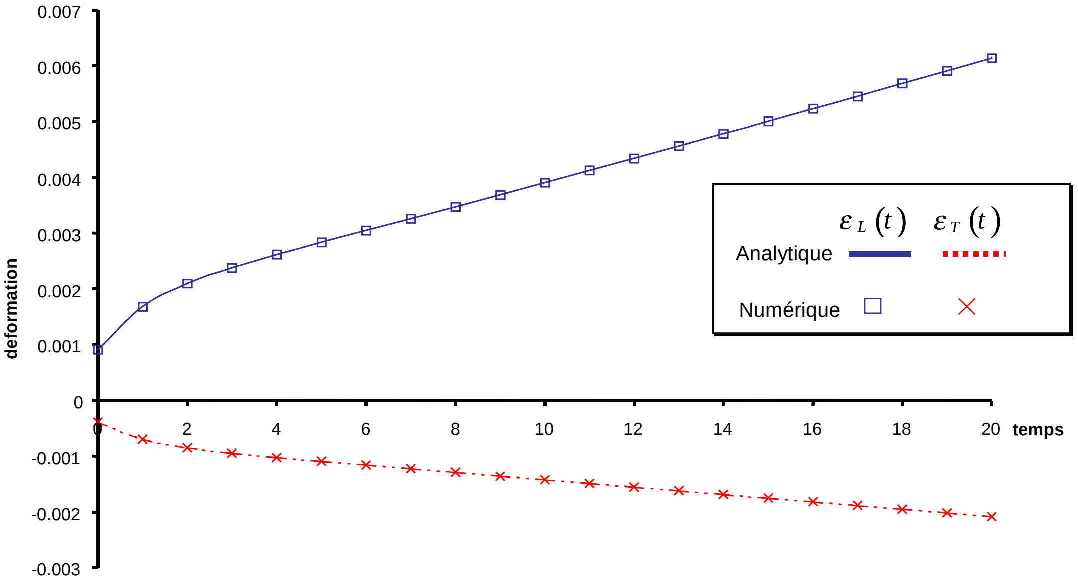
$$\{\Delta F_{vis}\}(\Phi_{n-1}) = \int_\Omega [B]^T \{\tilde{\sigma}\}(\Phi_{n-1}) dV$$

Implantation dans CASTEM 2000

Liste des exposés

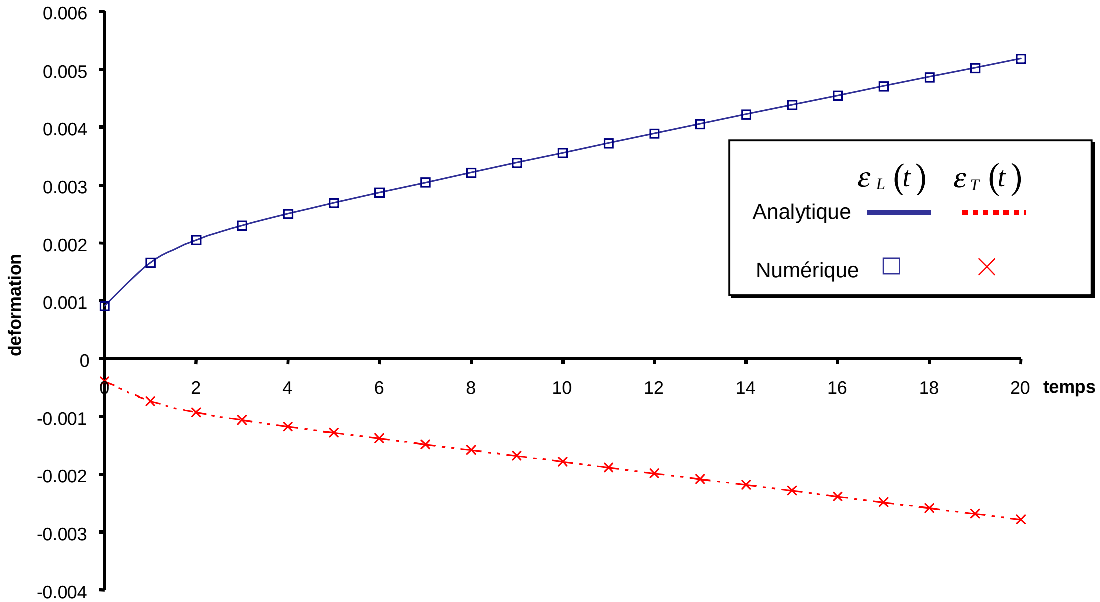
Validation numérique

- Assouplissement des ressorts et contrainte linéaire



Erreur <0.01%

- Rigidification des ressorts



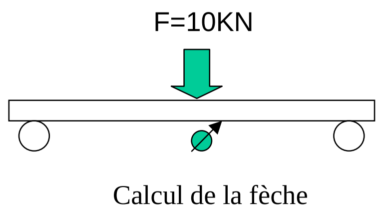
Erreur <0.02%

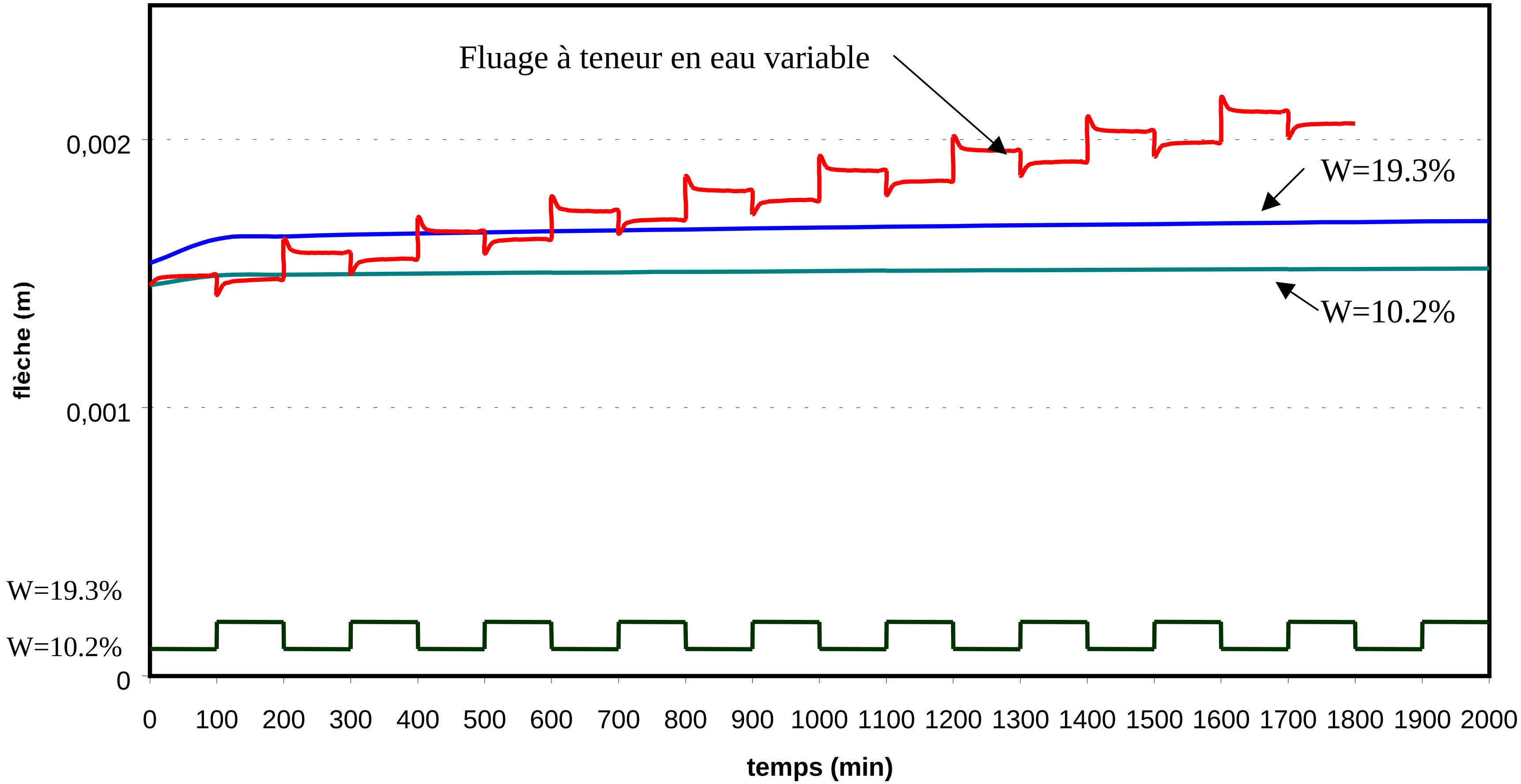
Liste des exposés

Application : fluage en flexion 3 point sur une poutre en bois

- Hypothèse : petite dimension ➡ Humidité homogène dans la poutre

$$(1mm \times 1mm \times 200mm)$$





Liste des exposés

Conclusion

- **Importance de l’humidité et de la température sur le modèle**

Nécessité d’un modèle de diffusion hydrique et thermique

- **Rigidification** du modèle viscoélastique **Deformation mécanosorptive du bois**

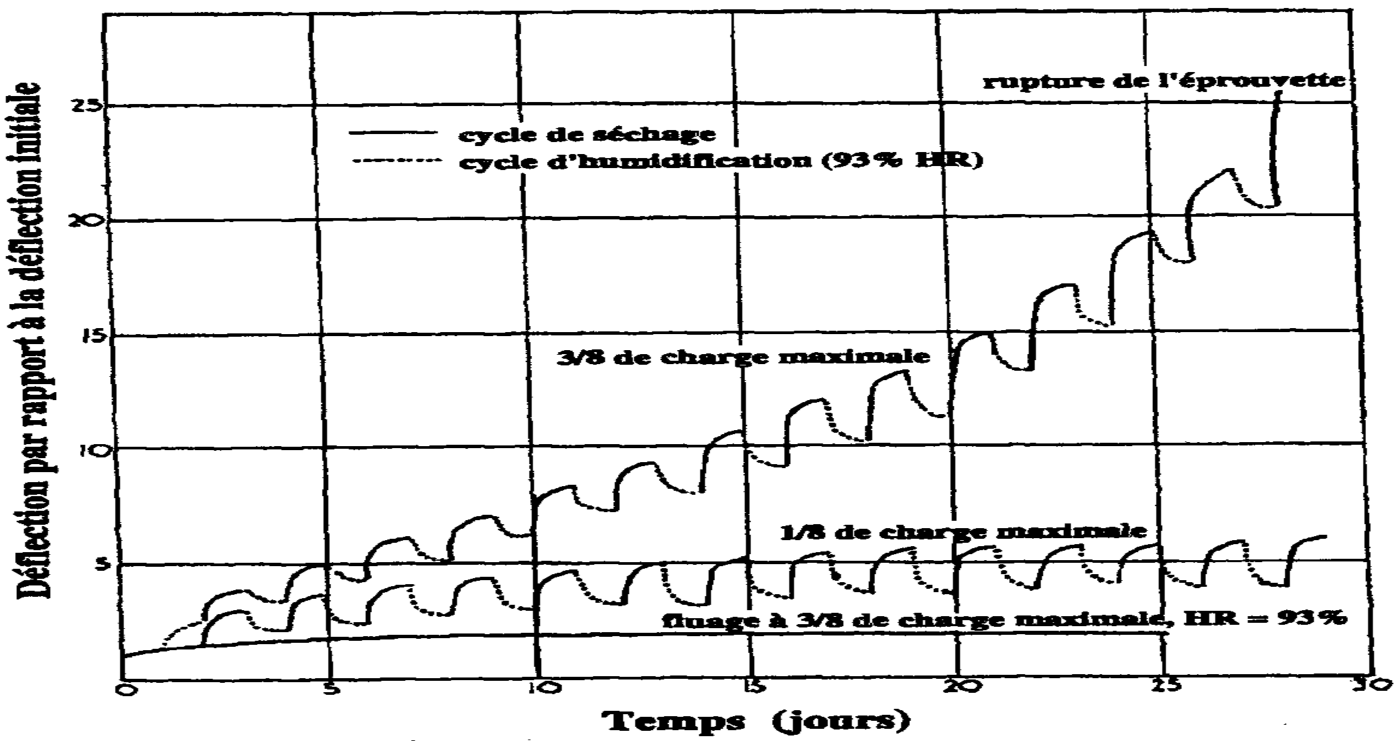


Figure. courbe expérimentale du fluage du bois dans un environnement variable [HEARMON]