

Méthodes probabilistes appliquées à l'étude des processus
aléatoires sous *Castem 2000* - Fiabilité

Cyril FEAU - Université d'Evry CEMIF - CEA EMSI

Position du problème :

- Les mouvements sismiques du sol sont suffisamment complexes pour qu'on leur associe un caractère aléatoire - il s'agit d'un phénomène transitoire et non stationnaire approché par un processus aléatoire du type :

$$X(t) = E(t) \sum_i A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

ϕ_i variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $[-\pi, \pi]$, $E(t)$ fonction enveloppe.

- La réponse de la structure est également un processus aléatoire dont on cherche à déterminer ses caractéristiques \Rightarrow fiabilité.

Cas le plus simple :

source stationnaire $X(t) = \sum_i A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$

(bruit blanc gaussien) et réponse de la structure sur 1 mode.

Caractérisation d'un processus aléatoire

1 / 4

- **densité de probabilité :**

$p_X(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$, probabilité que le processus ait une valeur comprise entre $]x_1, x_1 + dx_1]$ en t_1 et $]x_2, x_2 + dx_2]$ en t_2 etc ..

- **densité de probabilité conditionnelle :**

probabilité que le processus prenne une valeur comprise entre $]x_n, x_n + dx_n]$ à un instant t_n sachant que sa valeur est x_{n-1} à l'instant t_{n-1} , etc

$p_n(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)$.

- **densité de probabilité transitionnelle :**

$p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1)$

Pour un processus **purement aléatoire** (sans mémoire) *ie* ayant ses différentes valeurs statistiquement indépendantes, l'ordre 1 est suffisant pour le décrire.

$p_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_1(x_1, t_1)p_1(x_2, t_2)$ et

$p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) = p_1(x_2, t_2)$.

Les processus qui nécessitent une description à l'ordre 2 sont appelés **processus de Markov**

Caractérisation d'un processus aléatoire

2 / 4

- **Moments statistiques :**

$$E(X^n(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n(t) p_X(x, t) dx(t) \quad (1)$$

- **Moments temporels :**

$$\langle x^n(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^n(t) dt \quad (2)$$

(1) équivalent à (2) si processus stationnaire et ergodique (moyennes temporelles égales \forall échantillons).

- **Moments spectraux :**

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega|^n S_{XX}(\omega) d\omega \quad (3)$$

avec $S_{XX}(\omega)$ la DSP d'un processus aléatoire stationnaire.

Caractérisation d'un processus aléatoire

3 / 4

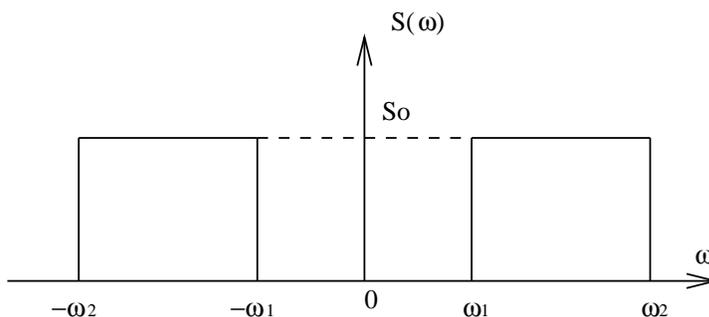
- **Densité Spectrale de Puissance :**

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{XX}(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau \quad \in] -\infty, +\infty[$$

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} E\left(\frac{|X(f)|^2}{T}\right)$$

- **Largeur de bande :**

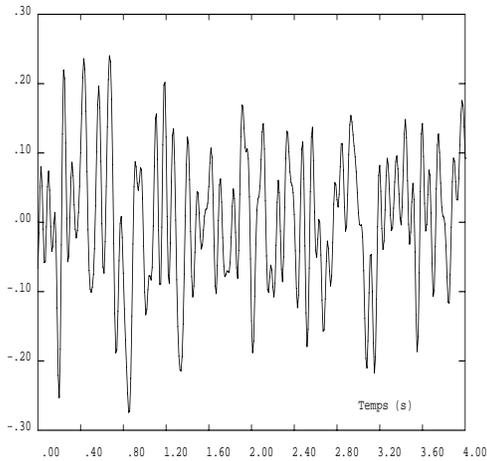
$$\delta = \left(1 - \left(\frac{m_1^2}{m_0 m_2}\right)\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \epsilon = \left(1 - \left(\frac{m_2^2}{m_0 m_4}\right)\right)^{1/2}$$



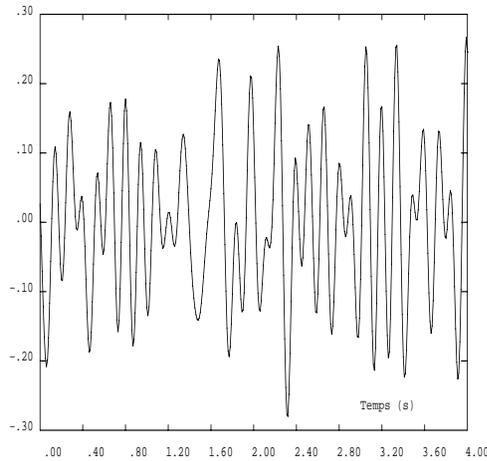
$$m_i = 2 S_0 / (i+1) (\omega_2^{(i+1)} - \omega_1^{(i+1)})$$

Caractérisation d'un processus aléatoire

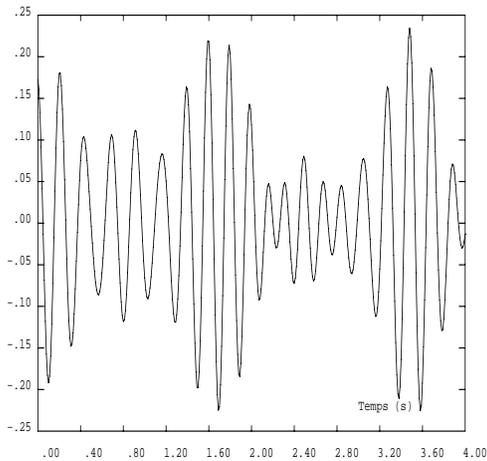
4 / 4



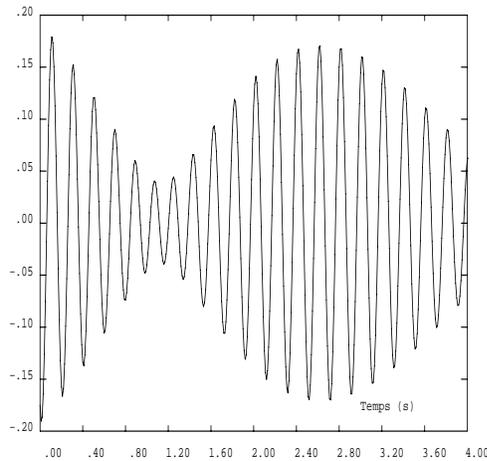
DELTA .49999 EPS .66666 FRQ MOY 8.6603



DELTA .32737 EPS .53063 FRQ MOY 5.2913



DELTA .11474 EPS .22254 FRQ MOY 5.0330



DELTA 2.31204E-02 EPS 4.61816E-02 FRQ MOY 5.0011

Largeurs de bandes : $\delta = 0.49, 0.33, 0.12, 2.10^{-2}$

Génération de processus aléatoire

1 / 2

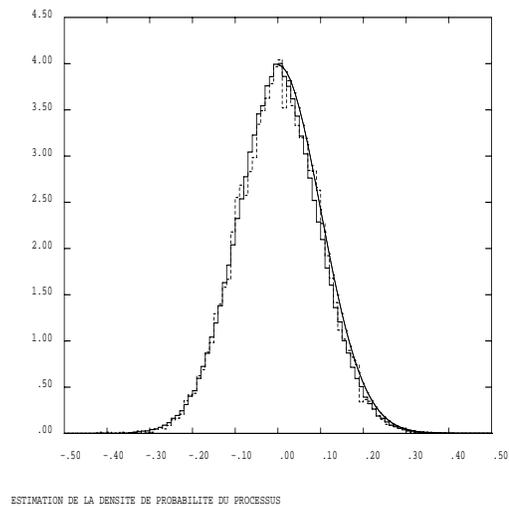
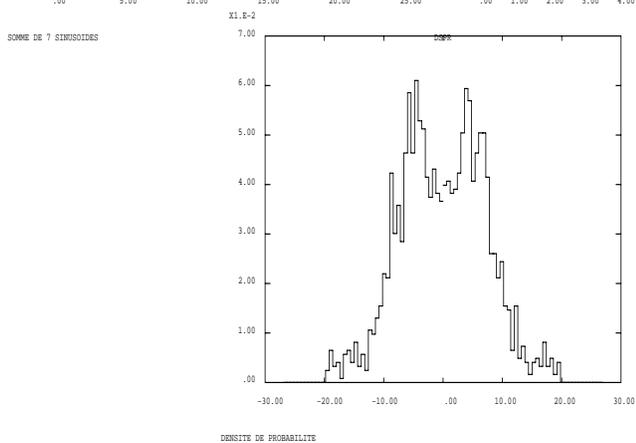
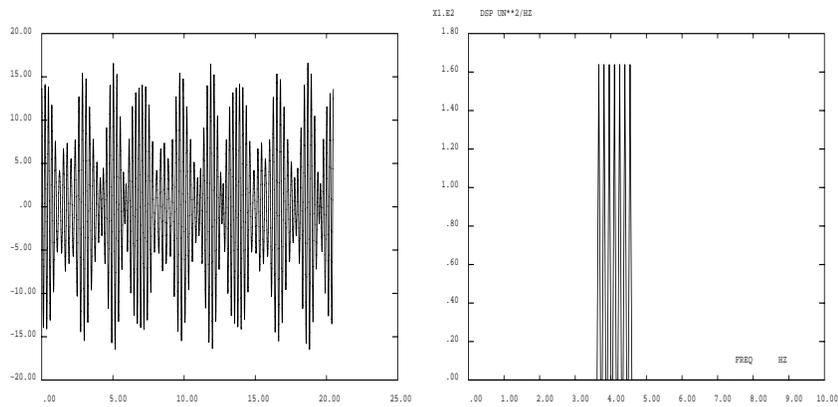
- DSP processus stationnaire, de moyenne nulle et échantillonné (T_0) : $S(\frac{m}{T}) = 2\sigma^2 T_0$,
- DSP bruit blanc : $\frac{A_n^2 T}{2}$,
- Module TF bruit blanc : $\frac{A_n T}{2}$ soit $\sigma \sqrt{\frac{T}{N \Delta f}}$.

Avec *Castem 2000*, on construit la TF et on utilise l'opérateur *TFRI* pour obtenir l'évolution recherchée.

Ce type de processus est asymptotiquement Gaussien en vertu du Théorème de la Limite Centrale, quand le nombre de sinusoides générées est important. Typiquement lié à la durée du signal car inverse du pas d'échantillonnage en fréquence.

Génération de processus aléatoire

2 / 2



On restreint l'étude aux processus stationnaires Gaussiens à moyenne nulle

Fiabilité - définition

la **fiabilité** $W(a, T)$ est définie comme la **probabilité** pour que le **processus** $X(t)$ **reste dans un domaine de sécurité** pendant un temps T , **typiquement inférieur à un seuil** a donné. Cette probabilité s'exprime par :

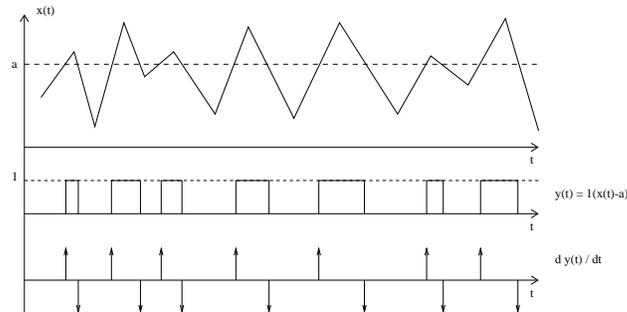
$$W(a, T) = P(X(t) \leq a \text{ et } 0 \leq t \leq T)$$

Etude statistique des valeurs extrêmes :

- étude des franchissements de seuil du processus : $X(t) < a$, $|X(t)| < a$,
- étude des maxima des processus,
- étude des franchissements de l'enveloppe (processus à bande étroite).

L'étude de la fiabilité du processus, constitue l'aboutissement de la mise en oeuvre de ces techniques, elle s'effectue à l'aide de l'étude **du premier passage**.

Franchissements de seuil



- Fréquence moyenne de franchissements de seuil :

$$v_a^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_X^2}\right) \text{ Rice 1945}$$

$$v_0^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \text{ fréquence moyenne}$$

- Fréquence moyenne des maxima :

$$E(N(t)) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2}\right)^{1/2}$$

Etude de l'enveloppe

1 / 2

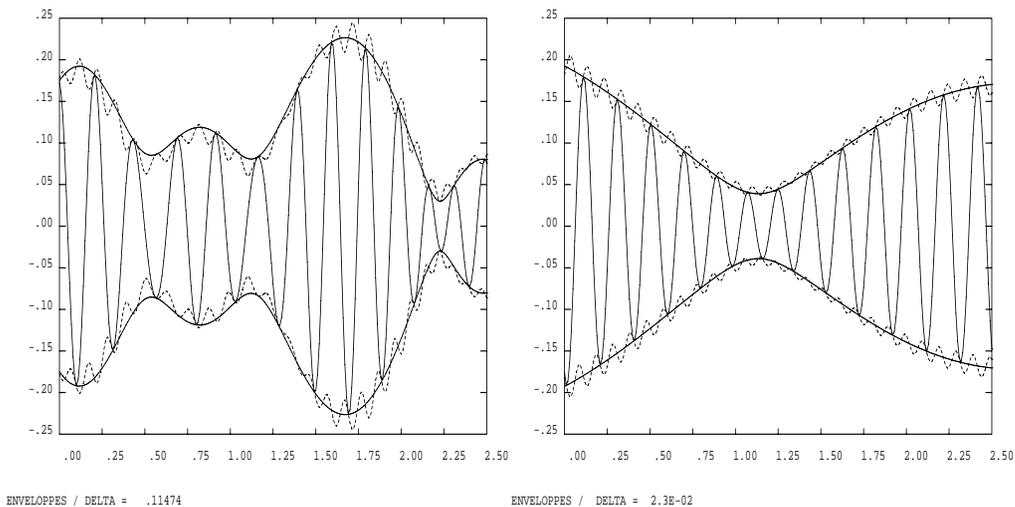
- Crandall & Mark (bande étroite) :

$$E^2(t) = X^2(t) + \left(\frac{\dot{X}(t)}{\omega_0}\right)^2$$

- Cramer & Leadbetter ($\delta = 0 \rightarrow 1$) :

$$E(t) = (X^2(t) + \hat{X}^2(t))^{1/2}$$

$\hat{X}(t)$ transformée de Hilbert du processus.



$$\delta = 0.12, 2.10^{-2}$$

Etude de l'enveloppe

1 / 2

- Densité de probabilité (Rayleigh) :

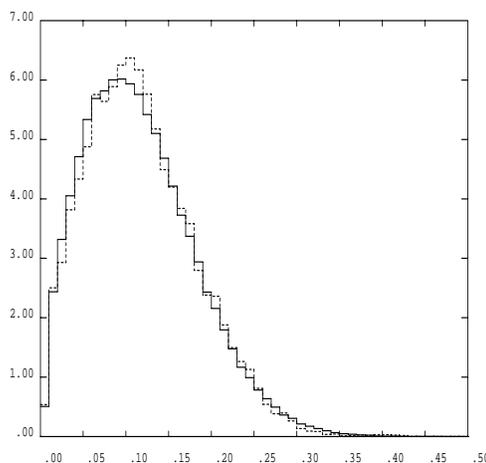
$$p_E(e) = \frac{e}{\sigma_X^2} \exp\left(-\left(\frac{e^2}{2\sigma_X^2}\right)\right)$$

- Fréquence moyenne de dépassements :

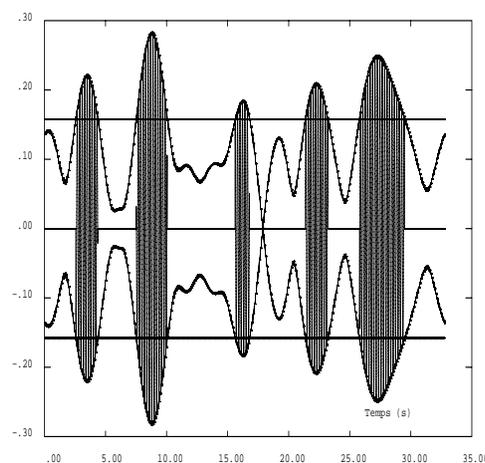
$$n_a^+ = \sqrt{2\pi} \delta \eta v_a^+$$

- La taille moyenne des groupes (nombre moyen de maxima)

$$n_g = \frac{2v_a^+}{n_a^+}$$



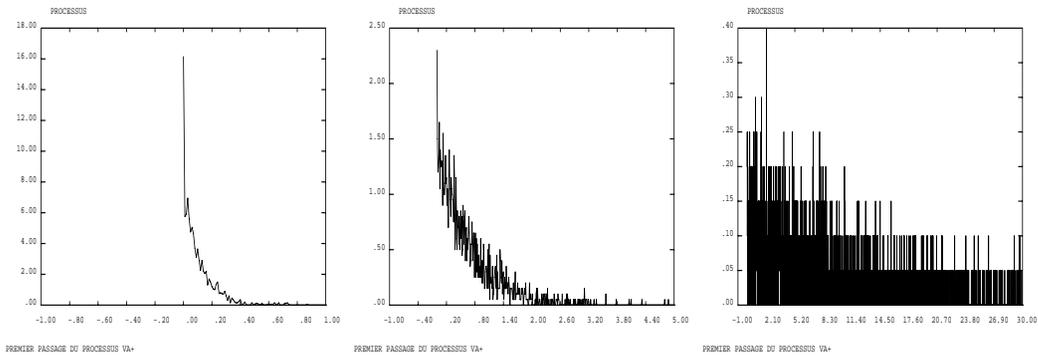
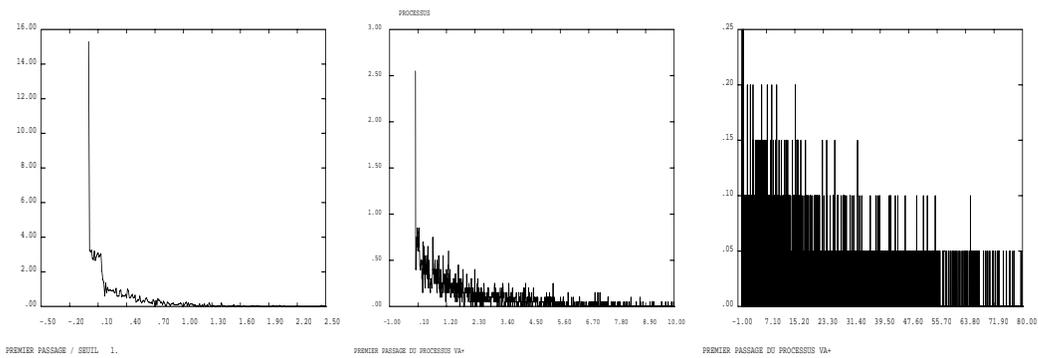
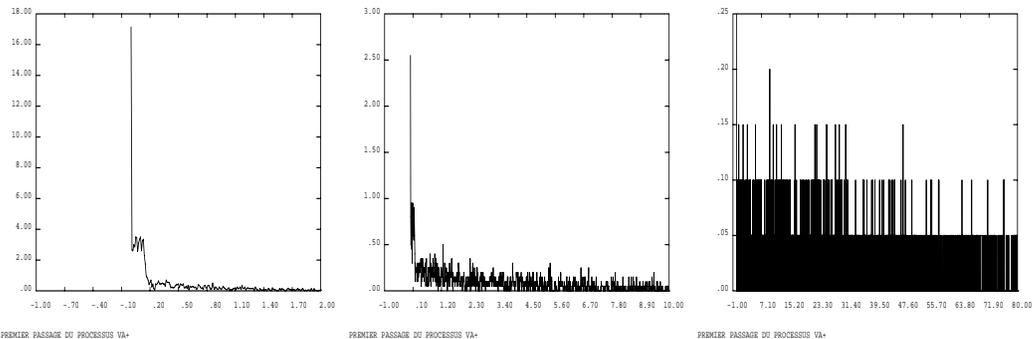
DENS. PROB. ENV. DELTA = .49999



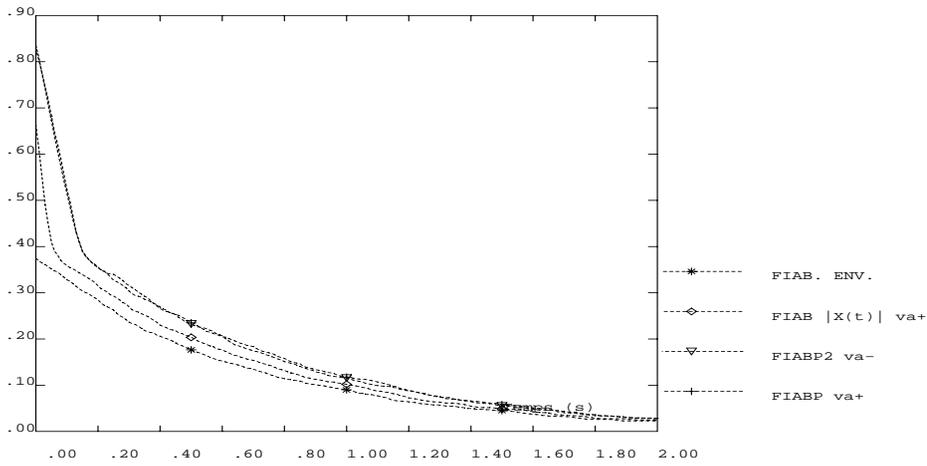
NBRE DE MAX AU DESSUS DE +a ET -a : 116 TAILLE MOY DES GROUPES : 23

Etude du premier passage

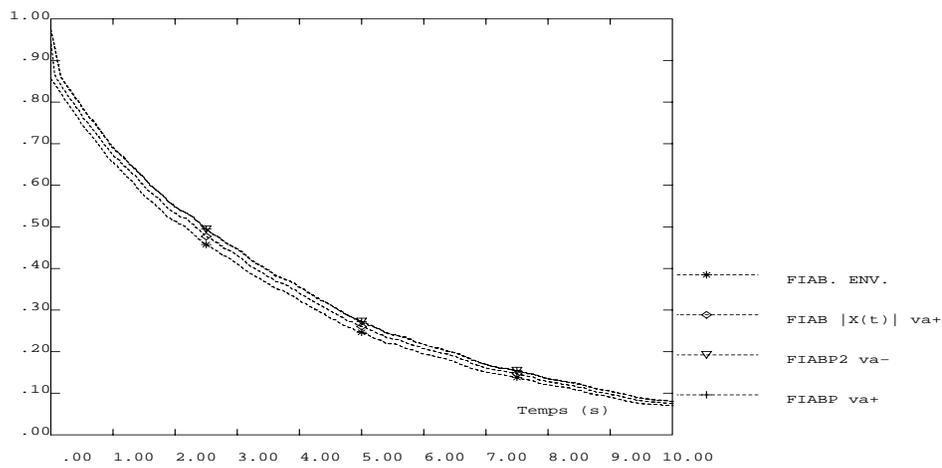
Seuils : $\delta = 0.05, 0.1, 0.5$ du type $X(t) < a$.



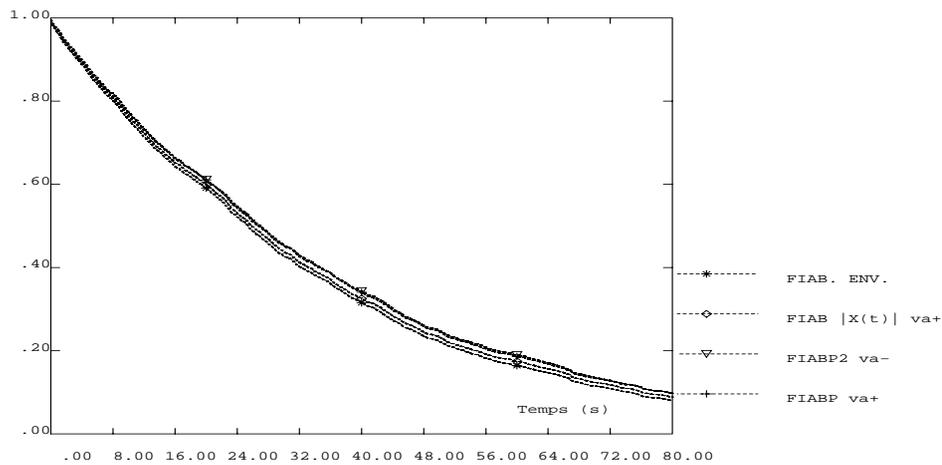
Fiabilité $\delta = 0.05$



Delta 5.84775E-02 coef 1.0000 fmoy 5.0012 ect .10060



Delta 5.84775E-02 coef 2.0000 fmoy 5.0012 ect .10060



Delta 5.84775E-02 coef 3.0000 fmoy 5.0012 ect .10060

Enveloppe précède toujours le processus \rightarrow
 fiabilité plus faible.
 Si $a \nearrow$, fiabilité \nearrow .

Fiabilité - modèles

1 / 2

- Franchissements de seuils indépendants

Poisson processus

$$W(\eta, N) = e^{-Ne^{(-\eta^2/2)}}, \quad N = 2v_0^+T, \quad \eta = \frac{a}{\sigma_X}$$

Poisson enveloppe

$$e^{-\sqrt{\pi/2}N\delta\eta e^{(-\eta^2/2)}}$$

- Modèles de Vanmarcke

$$(1 - e^{(-\eta^2/2) \log 2}) e^{-N \frac{1 - e^{-\sqrt{\pi/2}\delta^{1.2}\eta}}{1 - e^{(-\eta^2/2)}}$$

Dépassements de seuils de l'enveloppe

$$(1 - e^{(-\eta^2/2)}) e^{-N \frac{1 - e^{-\sqrt{\pi/2}\delta^{1.2}\eta}}{e^{(\eta^2/2)}}$$

Dépassements du type $|X(t)| < a$

$$(1 - e^{(-\eta^2/2)}) e^{-N \frac{1 - e^{-\sqrt{\pi/2}\delta^{1.2}\eta}}{e^{(\eta^2/2)} - 1}}$$

Fiabilité - modèles

1 / 2

- Processus $Y(n)$ composé d'extrema :

Hypothèse d'indépendance d'apparition des extrema

$$W(T) = \left(1 - \frac{v_a^+}{v_0^+}\right)^{2v_0^+ T}$$

- Processus de Markov :

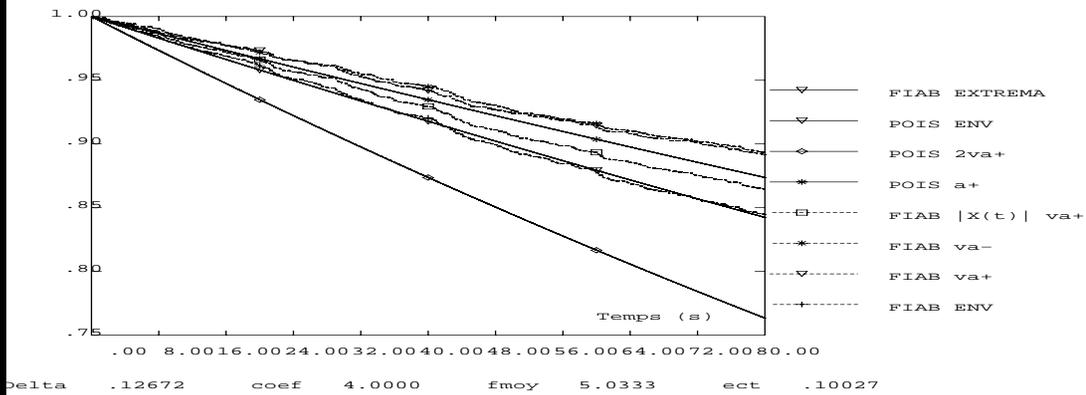
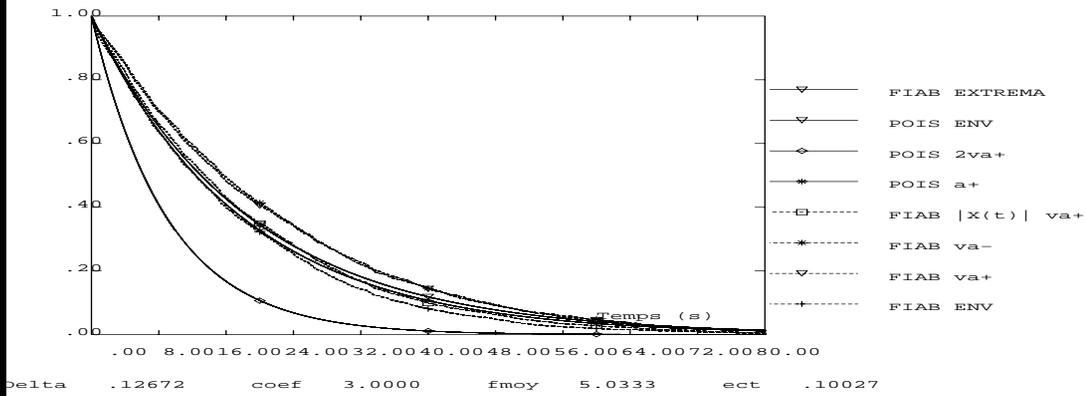
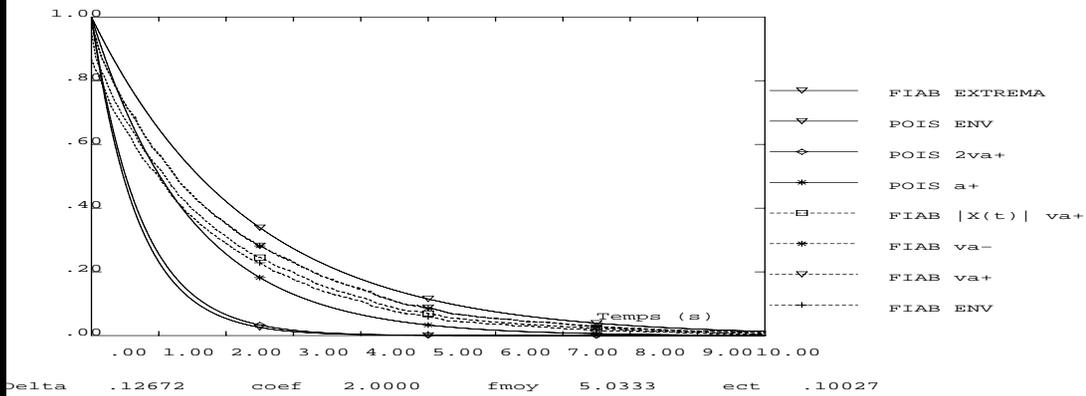
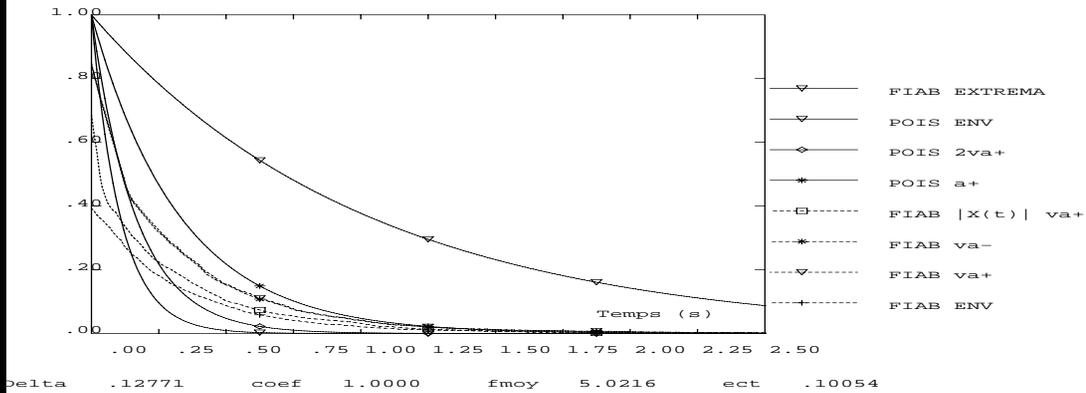
$$W(T) = (1 - q_0) \left(\frac{q}{1 - q_0}\right)^{\left(2v_0^+ T - \frac{1}{2v_0^+}\right)}$$

$$q_0 = P(Y(n) \geq a) = \int_{\eta}^{\infty} x e^{-x^2/2} dx = e^{-\eta^2/2}$$

$$\begin{aligned} q &= P((Y(n) \geq a), (Y(n-1) < a)) \\ &= \int_b^{\infty} da_2 \int_0^b p_E(a_1, a_2, \frac{1}{2v_0^+}) da_1 \end{aligned}$$

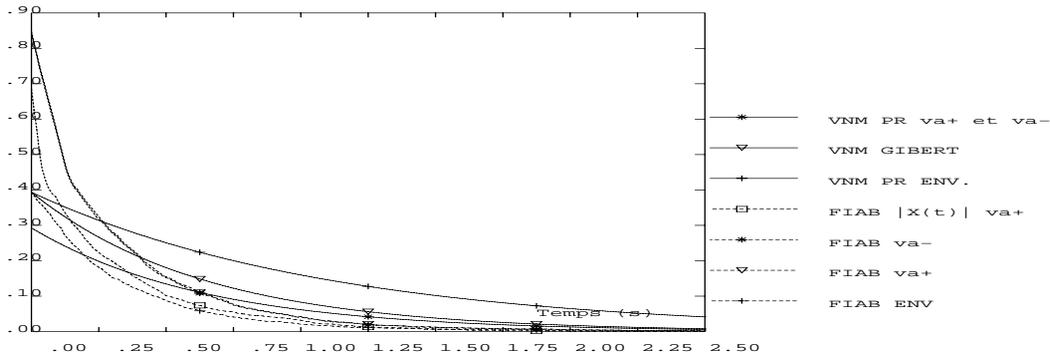
$p_E(a_1, a_2, \frac{1}{2v_0^+})$ densité de probabilité conjointe de l'enveloppe en deux instants séparés d'un demi-cyle moyen $\frac{1}{2v_0^+}$ (position des extrema).

Résultats $\delta = 0.1 \eta = 1, 2, 3, 4$

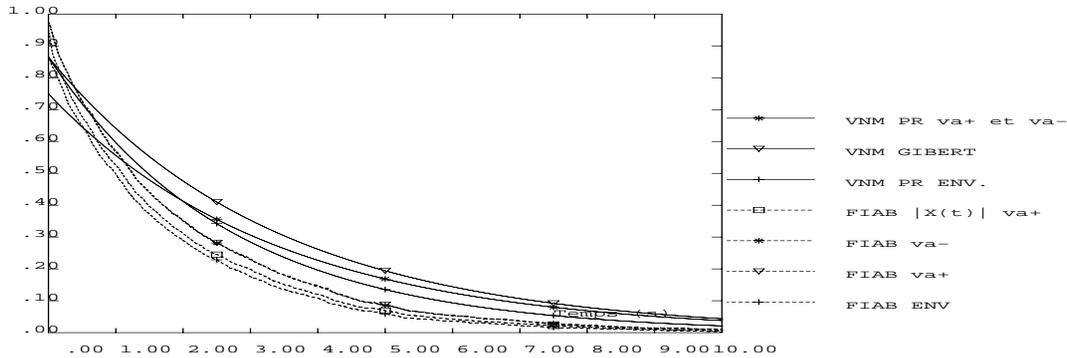


Hyp. indépendance valable si a élevé.

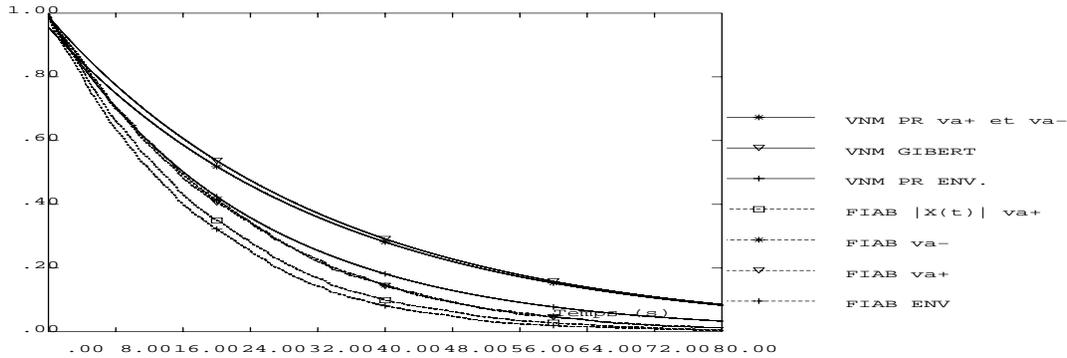
Résultats $\delta = 0.1 \eta = 1, 2, 3, 4$



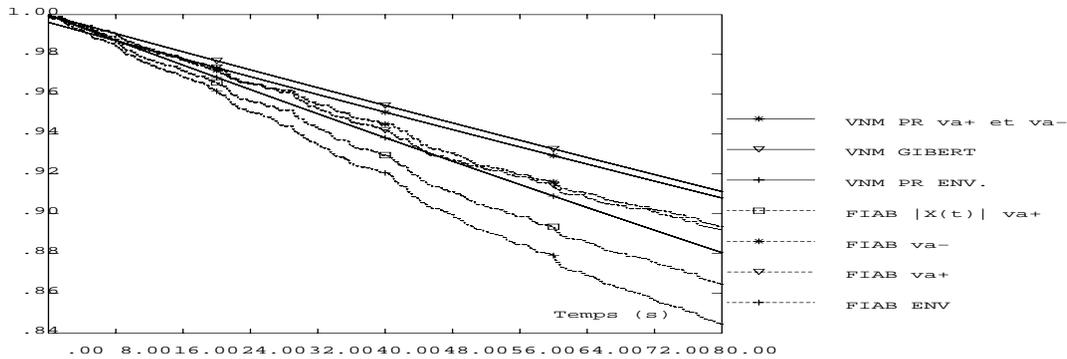
Delta .12771 coef 1.0000 fmoy 5.0216 ect .10054



Delta .12672 coef 2.0000 fmoy 5.0333 ect .10027



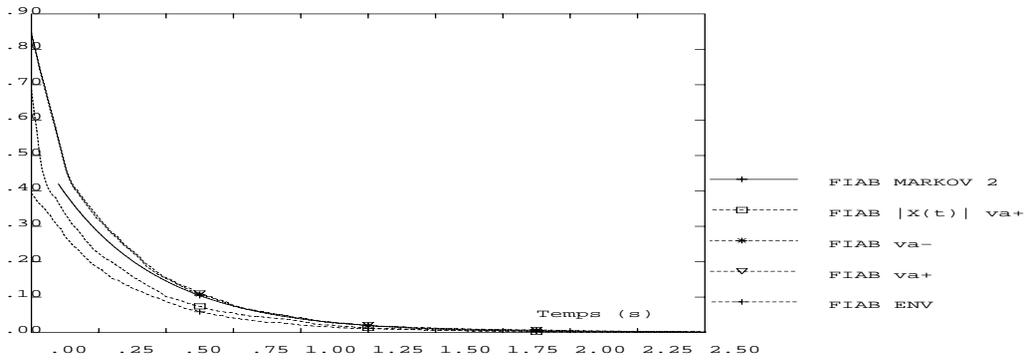
Delta .12672 coef 3.0000 fmoy 5.0333 ect .10027



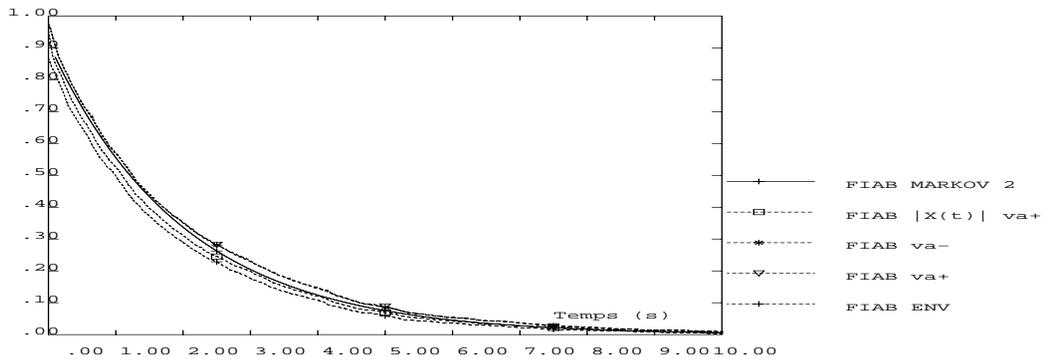
Delta .12672 coef 4.0000 fmoy 5.0333 ect .10027

Bon accord en 0 - pas assez conservatif pour l'ingénieur.

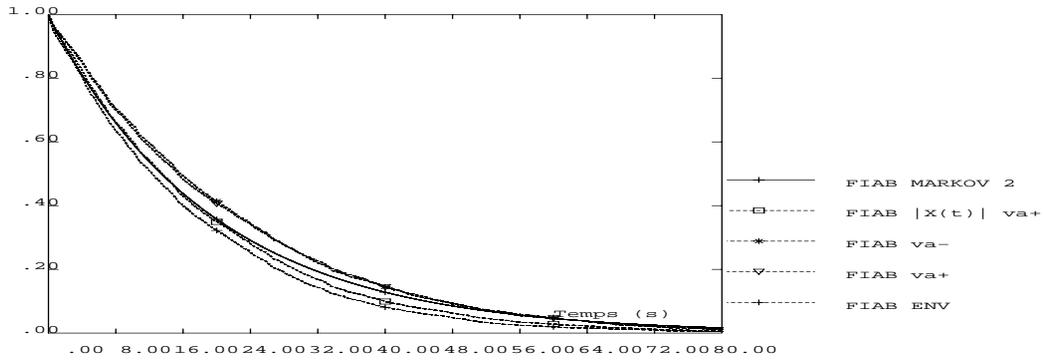
Résultats $\delta = 0.1 \eta = 1, 2, 3, 4$



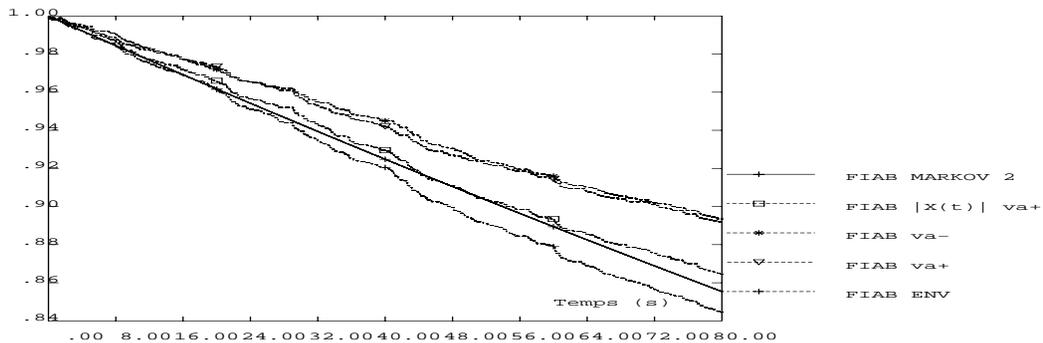
Delta .12771 coef 1.0000 fmoj 5.0216 ect .10054



Delta .12672 coef 2.0000 fmoj 5.0333 ect .10027



Delta .12672 coef 3.0000 fmoj 5.0333 ect .10027



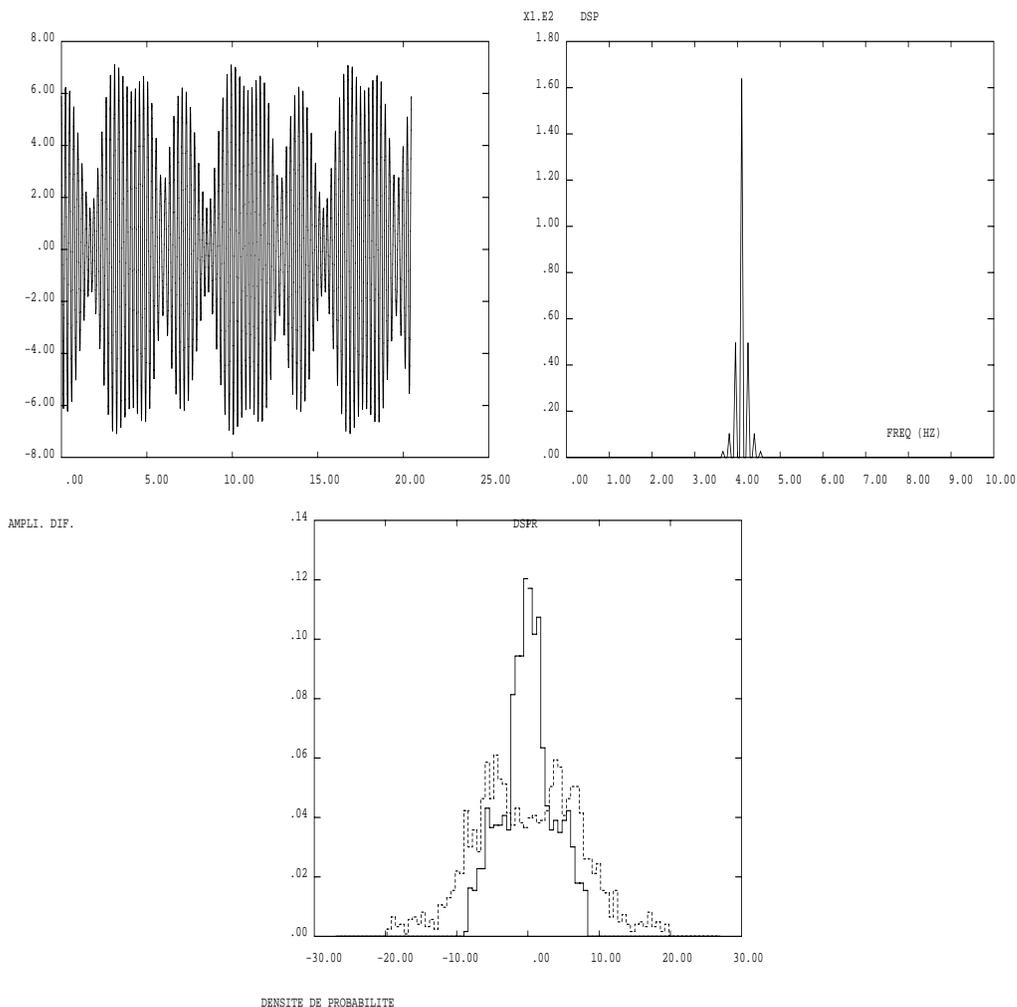
Delta .12672 coef 4.0000 fmoj 5.0333 ect .10027

La meilleure estimation.

Réponse d'une structure monomodale à un bruit blanc gaussien

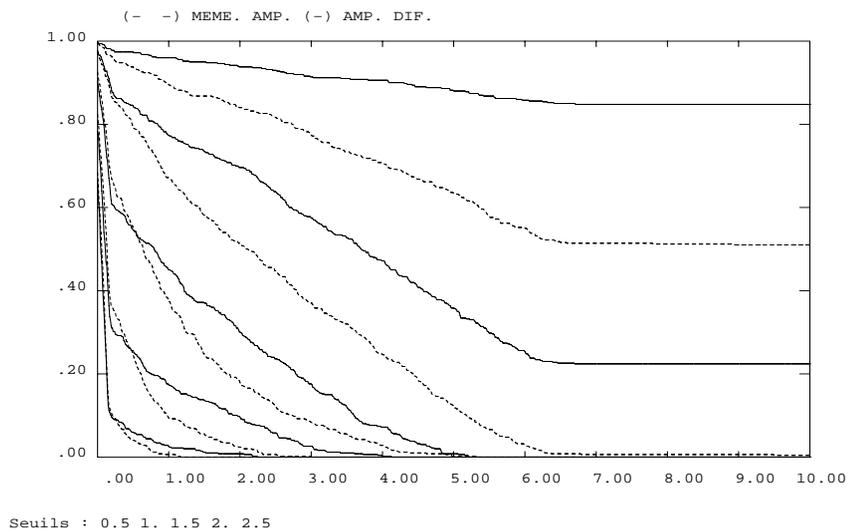
- réponse non-stationnaire,
- processus gaussien,
- DSP bande étroite (fonction de l'amortissement), non uniforme et centrée autour de la fréquence du mode.

⇒ influence de la forme de la DSP sur la fiabilité



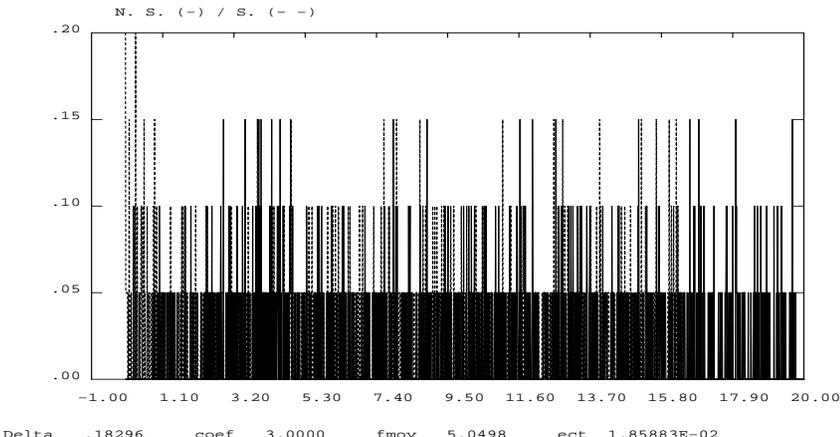
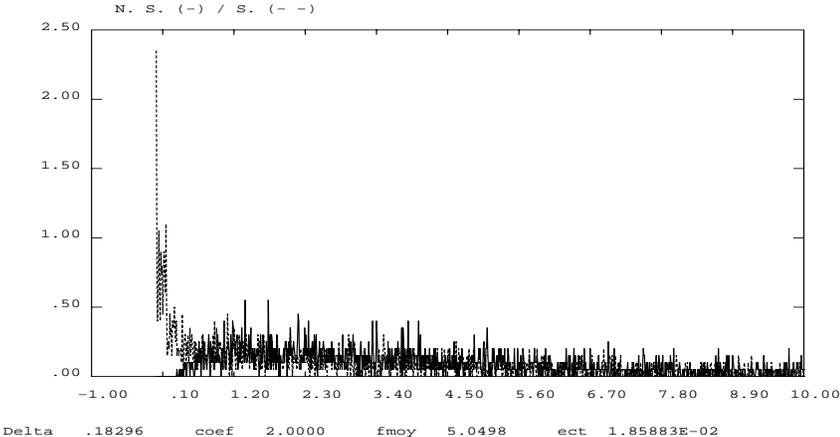
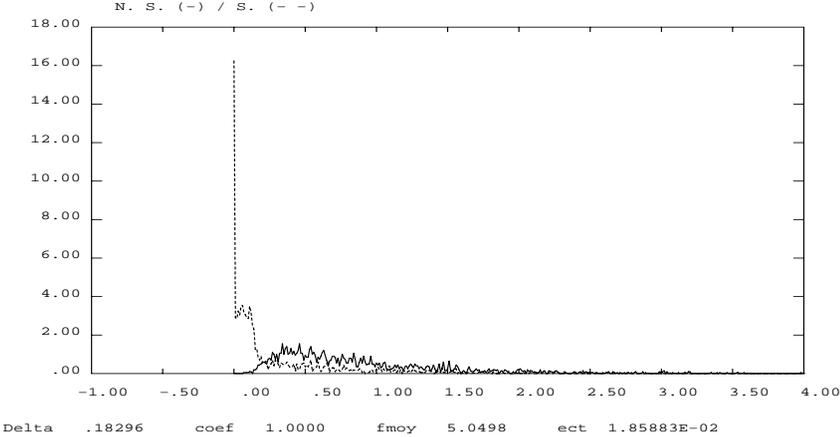
Réponse d'une structure

- diminution de l'écart-type
- augmentation de la fiabilité

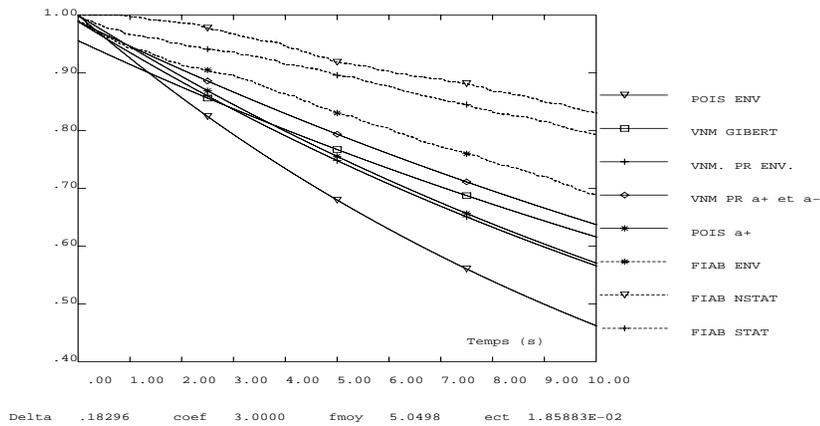
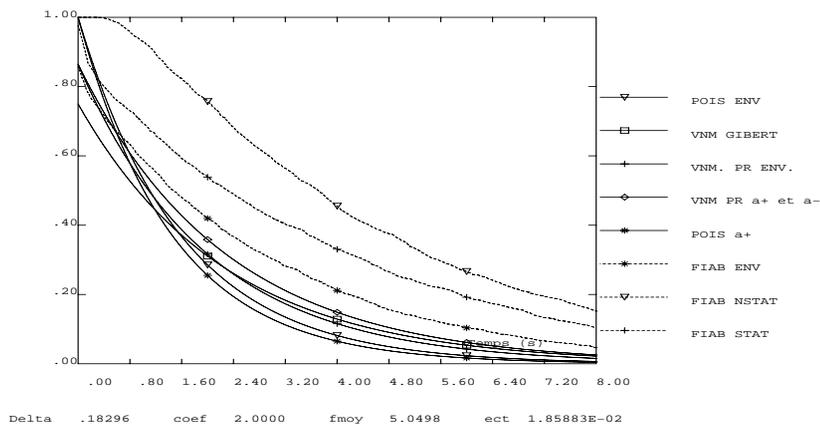
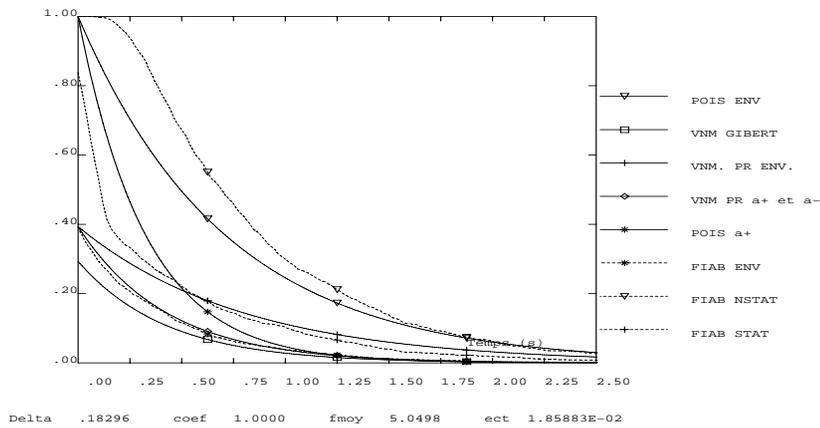


Réponse d'une structure - Premier passage

- conditions initiales stationnaires,
- conditions initiales non-stationnaires.



Réponse d'une structure - Fiabilité



Fiabilité à C.I. stationnaires < Fiabilité à C.I.
non-stationnaires.

Pour C.I. non-stationnaires toutes les approches
sont conservatives.