Multiplicateur de Lagrange, Condensation Statique et Conditions Unilatérales

P. Verpeaux[1], T. Charras[2]

[1] *CEA/DEN/DM2S/SEMT, Saclay France, Pierre.Verpeaux@cea.fr*
[2] *CEA/DEN/DM2S/SEMT/LM2SMS, Saclay France, Thierry.Charras@cea.fr*

Résumé — Ou il sera question du traitement des conditions unilatérales dans le code Cast3M (www-cast3m.cea.fr).
Les conditions de Dirichlet non homogène sont traitées dans Cast3M par le biais de multiplicateurs de Lagrange. L'aspect unilatéral est pris en compte par l'activation ou la désactivation de ces conditions. Afin de pouvoir factoriser la matrice, les multiplicateurs de Lagrange sont dédoublés. Le problème est d'abord condensé sur le deuxième multiplicateur de Lagrange pour réduire la taille du système.

Mots clefs — Multiplateurs de Lagrange, condensation statique, condition unilatérale.

1 Condition de Dirichlet

La condition de Dirichlet est représenté dans le code Cast3M par un opérateur de blocage reliant un multiplicateur de Lagrange aux inconnues de déplacement.

L'existence de la factorisation de la matrice n'étant pas garanti si la raideur générale n'est pas défini positive avant l'adjonction de l'opérateur de blocage, le multiplicateur de Lagrange est dédoublé. La matrice de condition devient donc:

-1	1	1	R1
1	0	1	F
1	1	-1	R2
$\lambda 1$	U	$\lambda 2$	

La matrice est alors factorisable à condition de numéroter un multiplicateur de Lagrange avant l'inconnue de déplacement concernée et l'autre après.

Remarquons qu'en modifiant la valeur du dernier terme diagonal, il est possible d'annuler l'effet de la condition:

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & R1 \\ 1 & 0 & 1 & F \\ 1 & 1 & 3 & R2 \\ \lambda 1 & U & \lambda 2 & \end{array}$$

2 Condensation statique

La condensation statique est faite en résolution directe par une technique de factorisation interrompue. Seuls sont gardés les deuxièmes multiplicateurs de Lagrange. Le problème condensé ne porte donc plus que sur les multiplicateurs de Lagrange associés à des conditions unilatérales, un par condition.

En résolution itérative, la condensation peut être effectuée à l'aide d'une résolution sur chaque inconnue à conserver.

3 Résolution du système unilatéral

Le système unilatéral est résolu par une méthode algébrique de statuts. A chaque itération, les conditions violées en déplacement ou en réaction sont respectivement activées ou désactivées. En cas de difficultés de convergence, une seule condition est modifiée à chaque itération. La convergence du procédé peut être prouvée si la raideur hors condition est définie positive (ce qui n'est pas le cas général).

La désactivation de la condition dans le système condensée est faite en modifiant le terme diagonal correspondant comme décrit au paragraphe 1.

4 Comparaison de deux méthodes

Cette nouvelle méthode est comparée à la méthode utilisée jusqu'à maintenant dans Cast3M.

Dans celle ci, la condensation est effectuée sur l'ensemble des inconnues de déplacements et des multiplicateurs de Lagrange apparaissant dans les conditions unilatérales. Il en résulte un système plus important que dans la nouvelle méthode. Par contre il est moins coûteux à résoudre à chaque itération car il est plus creux et on peut y éliminer des inconnues.

Les premières observations montrent que la nouvelle méthode est plus robuste et plus économe en itérations que l'ancienne. Cela vient du fait que l'opérateur condensé sur les multiplicateurs de Lagrange uniquement est mieux conditionné.

Références

[1] P. Verpeaux, Cours ENS Cachan frottement :http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/html/Courspv/frottement.doc
[2] Cast3m, code d'éléments finis CEA: http://www-cast3m.cea.fr/
[3] J. Pellet, Manuel de référence Aster: dualisation des conditions aux limites,1991
[4] *R.J. Guyan: R.J. Guyan, Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAA Journal, Vol. 3(2), p380, 1965.*